

Подход к построению кратчайшего энергоэффективного маршрута на пересеченной местности

М.Д. Иванов, О.В. Авсеева

Аннотация— Рассматривается задача построения маршрута в условиях пересеченной местности без дорог, с перепадами высот и непроходимыми участками. Для решения задачи участок местности представляется в виде графа путем наложения регулярной сетки.

В работе рассмотрено два способа построения графа, из которых выбран способ, при котором в число дуг графа включаются как стороны, так и диагонали четырехугольника наложенной регулярной сетки. Веса ребер полученного графа состоят из обобщенного коэффициента дуги, характеризующего относительные энергетические затраты на перемещение, и приведенного веса дуги. Приведенный вес дуги графа является функцией от фактической длины дуги, рельефа местности и ограничений на перемещение.

Для определения кратчайшего маршрута на графе проанализированы четыре алгоритма поиска: алгоритм Дейкстры, A^* , Θ^* и Lazy Θ^* . Для решения задачи выбран алгоритм Lazy Θ^* , который достигает компромисса между качеством пути и производительностью. Для корректного функционирования алгоритма в условиях реальной местности алгоритм был модифицирован для учета географических особенностей, таких как рельеф, водные и болотистые преграды, а также допустимые уклоны в зависимости от способа передвижения.

Общий алгоритм решения задачи состоит из нескольких шагов. Вначале производится дискретизация всей заданной области с учетом точной геодезической кривизны и фиксированного шага между узлами, заданного в метрах. При построении сетки учитываются данные о водных объектах, которые находятся в пределах выбранной пользователем области, и о высотах местности. Затем осуществляется привязка начальной и конечной точек маршрута, выбранных пользователем, к ближайшим доступным точкам на сформированной сетке. Поиск маршрута осуществляется модифицированным алгоритмом Lazy Θ^* . Для проверки существования прямой видимости между точками маршрута используется алгоритм Брезенхема.

Реализовано веб-приложение, позволяющее строить маршрут для пешего и автомобильного способа передвижения.

Ключевые слова— Поиск пути, граф перемещений, алгоритм Lazy Θ^* .

I. ВВЕДЕНИЕ

Современные системы навигации играют большую роль в самых разнообразных сферах человеческой деятельности: от гражданских приложений до военного использования. Одной из наиболее сложных и востребованных задач является задача построения маршрута в условиях пересеченной местности, где отсутствует развитая инфраструктура дорог, а рельеф и другие природные особенности требуют учета. Она особенно актуальна для служб экстренного реагирования, военных подразделений, туризма, геологических экспедиций и других организаций, которым требуется быстрое и надежное планирование маршрутов в сложных географических условиях.

Рассматриваемая задача является актуальной. Например, в области мобильной робототехники и автономных систем способность ориентироваться в неструктурированных средах является серьезной проблемой. Большое число работ посвящено планированию маршрутов роботов в условиях сложного рельефа местности. Например, в [1]-[3] рассматривается задача планирования маршрута с учетом информации о рельефе местности для навигации автономных наземных транспортных средств на сложных рельефных поверхностях, таких как горы, леса и реки. В связи с развитием технологий беспилотных летательных аппаратов актуальной стала задача планирования траектории полета. В работах [4]-[13] для планирования траектории используется алгоритм Lazy Θ^* , являющийся улучшенной модификацией известного алгоритма A^* . В работах [14], [15] предлагается подход к построению маршрутов на пересеченной местности с помощью графа видимости, без построения полного графа. В работе [16] исследуются три возможных подхода к решению задачи о нахождении эффективного пути в двумерном пространстве с препятствиями. В качестве инструментов решения рассматриваемой задачи использованы наиболее известные метаэвристические методы: муравьиный алгоритм, метод роящихся частиц и эволюционно-генетический алгоритм. В работах [17]-[20] используются классические алгоритмы Дейкстры и A^* для поиска оптимального пути на построенной сетке.

В настоящей работе предложено двухэтапное решение задачи построения оптимального маршрута от начальной до конечной точек по пересеченной местности. На первом этапе исследуемая местность представляется в

Статья получена 12 апреля 2026.

М.Д. Иванов – ООО «ИНФОДЕТАЛИ», г. Воронеж, Россия (e-mail: maxim2003.maks@mai.ru)

О.В. Авсеева – доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ факультета Прикладной математики, информатики и механики, кандидат технических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия (e-mail: olga-avseeva@mai.ru).

виде взвешенного графа с учетом рельефа. На втором этапе решается задача поиска кратчайшего пути на графе.

II. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ВЗВЕШЕННОГО ГРАФА НА ОСНОВЕ СЕТКИ, НАЛОЖЕННОЙ НА ИССЛЕДУЕМУЮ МЕСТНОСТЬ

Рельеф местности является одним из ключевых факторов, определяющих сложность и особенности прокладки маршрутов. Различие в рельефе влияет на проходимость, скорость перемещения и выбор оптимальных маршрутов. Рельеф местности - сочетание вертикального и горизонтального расчленения земной поверхности [22], [23].

Рельеф на топографических картах изображается в Балтийской системе высот горизонталями и условными знаками и дополняется числовыми отметками высот характерных точек местности, цифровыми характеристиками его отдельных деталей и указателями направлений скатов.

А. Построение графа по узловым точкам элементарных участков

Одним из вариантов вычисления опорных точек для построения графа является разделение участка местности на равновеликие небольшие квадратные участки. Данный подход предполагает разделение рельефа на элементарные участки, полученные наложением на карту регулярной сетки, при этом из рассмотрения исключаются непригодные для перемещения территории [24].

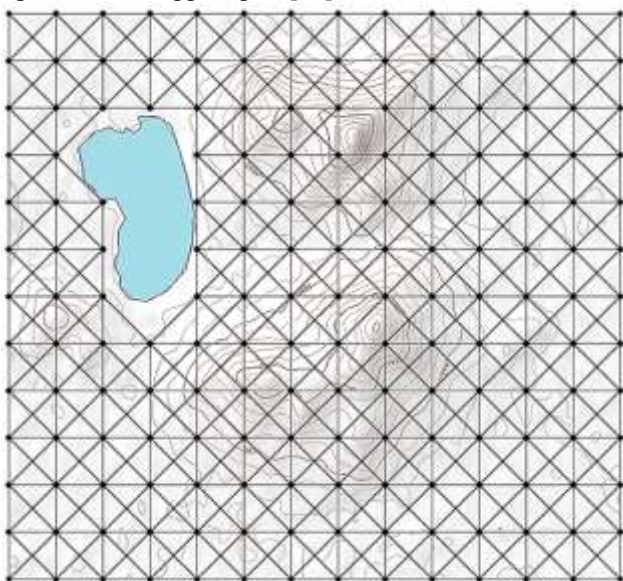


Рис. 1: Граф, полученный первым способом

Вершины четырехугольника (они же вершины формируемого графа) характеризуются координатами (x , y , h); значения (x , y) определяются построением сетки, а значения высоты h - с помощью цифровой модели рельефа. Стороны четырехугольника и его диагонали (они же предполагаемые дуги формируемого графа) в общем случае будут иметь различную длину и разную сложность прохождения. Сложность прохождения обусловлена характером рельефа. Таким образом, будет сформирована условная геометрическая поверхность из

элементарных участков, каждый из которых удовлетворяет ограничениям на проходимость без учета рельефа. На этой поверхности будет строиться граф возможных путей.

Веса ребер полученного графа состоят из обобщенного коэффициента дуги, характеризующего относительные энергетические затраты на перемещение, и приведенный вес дуги. Приведенный вес дуги графа является функцией от фактической длины дуги, рельефа местности и ограничений на перемещение.

Граф, построенный данным способом, изображен на рисунке 1.

В. Построение графа по центрам элементарных участков

Предложенный в работе [25] способ построения графа также основан на наложении регулярной сетки на поверхность.

Местность делится на элементарные участки (ячейки), которые представляют собой квадраты или прямоугольники с равной площадью. Каждая ячейка описывается следующими параметрами:

- координаты центра (x , y), которые определяют местоположение ячейки;
- высота (h), характеризующая рельеф;
- дополнительные данные, такие как тип поверхности, наличие препятствий и состояние грунта.

Каждому ребру присваивается вес, который учитывает:

- расстояние между центрами ячеек;
- разницу высот между соседними ячейками;
- вес ячеек, через которые проходит ребро.

Таким образом, граф отражает топологию местности и сложность её прохождения. На рисунке 2 изображен граф, полученный данным методом.

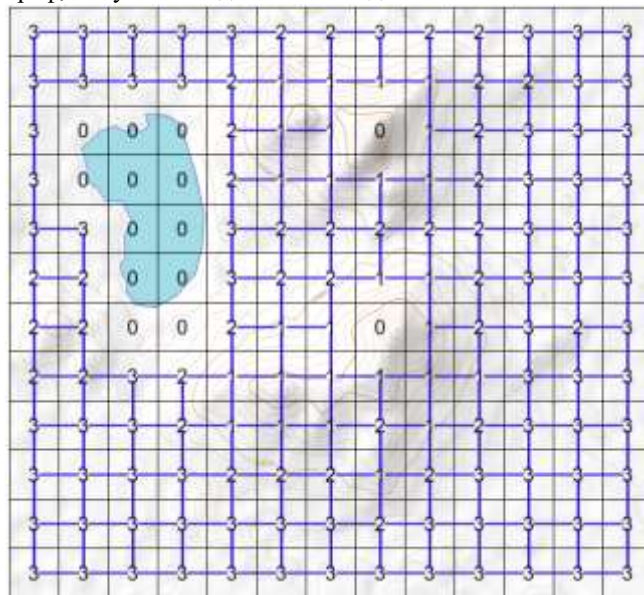


Рис. 2: Граф, полученный вторым способом

С. Выбор используемого способ построения взвешенного графа

Для определения наилучшего подхода для решения поставленной задачи, необходимо провести анализ представленных алгоритмов.

Основным их отличием является то, что в методе, предложенном А. И. Мухиным, А. М. Шлыком и Н. И. Рудневым [24], граф строится по узловым точкам элементарных участков, в то время как в методе П. А. Агеева, А. М. Кудрявцева и А. А. Смирнова [25] – по центрам. Использование первого подхода дает более точное представление о местности и позволяет лучше оценить рельеф в виду большого числа точек, подлежащих анализу. Использование второго метода больше целесообразно для равнинных территорий или относительно однородных участков, в то время как в горной местности результат будет иметь меньшую точность.

Второе отличие заключается в вычислении весов проходимости. В первом методе эти значения вычисляются по введенной формуле и не ограничены каким-либо диапазоном. Во втором методе оценка каждой ячейки принадлежит множеству, которое состоит из целых чисел от 0 до 3. Таким образом оценка местности также будет точнее при использовании подхода, предложенного в [24].

Кроме того, при построении графа первым способом у каждой вершины больше соседних узлов, что положительно скажется на качестве маршрута.

На основе проведенного анализа данных двух методов построения графа можно сделать вывод о том, что подход, основанный на использовании узловых точек элементарных участков в качестве вершин графа, является более предпочтительным для решения поставленной задачи.

III. ВЫБОР АЛГОРИТМА ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО МАРШРУТА

Для определения кратчайшего маршрута на графе было рассмотрено 4 алгоритма поиска: алгоритм Дейкстры, A*, Theta* и Lazy Theta*.

Алгоритм Дейкстры является одним из наиболее известных и широко применяемых алгоритмов поиска кратчайших путей во взвешенных графах. Он предназначен для определения кратчайшего пути от одной исходной вершины до всех остальных узлов графа, при условии, что все веса ребер неотрицательны. Алгоритм был предложен Эдсгером Дейкстрой в 1956 году и опубликован в 1959 году [26].

Алгоритм A* был предложен в 1968 году американскими исследователями Питером Хартом, Нильсом Нильссоном и Бертрамом Рафаэлем [27]. Алгоритм сочетает в себе преимущества метода Дейкстры и эвристического подхода, позволяя при соответствующих условиях значительно сократить количество обрабатываемых вершин, не теряя при этом точности результата.

Алгоритмы Theta* и Lazy Theta* представляют собой усовершенствованные модификации классического алгоритма A*. Их объединяет использование эвристической функции $h(n)$, что принципиально отличает их от алгоритма Дейкстры. Алгоритм Дейкстры лучше всего подходит для случаев, когда конечная точка маршрута заранее неизвестна. Поэтому этот метод, как правило, используется в задаче поиска кратчайших путей

от начальной точки до всех остальных вершин графа.

С другой стороны, алгоритмы, подобные A*, являются более целенаправленными и эффективными для задач, когда известна конечная цель. Они используют эвристику для оценки расстояния до конечной точки и стремятся минимизировать количество обрабатываемых вершин.

A*-подобные подходы, используя эвристическую функцию, обходят только те вершины, которые, как предполагается, приведут к цели. Это может значительно уменьшить количество обрабатываемых вершин и увеличить производительность, особенно при большом количестве вершин.

Таким образом, наилучшим подходом для решения задачи нахождения кратчайшего пути следования к точке назначения является алгоритм A* и его модификации. Основным их достоинством является то, что они всегда находят решение, близкое к оптимальному, благодаря использованию эвристики. При этом таким алгоритмом для поиска решения просматривается меньшее число вершин, что особенно важно при большом количестве узлов в графе [18], [19].

Алгоритм Theta* представляет собой расширение классического алгоритма A* и был предложен в 2007 году Свенном Кёнигом и Алексом Нэшем как способ построения более прямых маршрутов за счёт использования механизма прямой видимости между вершинами [28]. Главной особенностью данного алгоритма является то, что он позволяет не ограничиваться движением строго между соседними вершинами сетки, как это делает A*, а выполнять переходы между узлами, находящимися в пределах прямой видимости. Благодаря этому маршруты, получаемые с помощью Theta*, содержат меньше поворотов и приближены к идеальной кратчайшей траектории.

В основе алгоритма Theta* лежит тот же принцип, что и в A*: используется функция оценки $f(n) = g(n) + h(n)$, где $g(n)$ – стоимость пути от начальной вершины до текущей, $h(n)$ – эвристическая оценка оставшегося расстояния до цели, а n – текущая вершина. Однако ключевое отличие заключается в том, что при расчёте стоимости пути $g(n)$ допускается соединение текущей вершины напрямую с родительской вершиной, если между ними существует линия прямой видимости. Это позволяет алгоритму срезать путь, минуя промежуточные узлы, в отличие от A*, который всегда перемещается по смежным вершинам графа, что делает путь зигзагообразным.

В задачах, где поиск производится на дискретной сетке, такой проверкой может служить алгоритм Брезенхэма, который позволяет определить, пересекает ли прямая между двумя точками препятствия или нет [29].

Исследования, представленные в [28] и [30], показывают, что Theta* при аналогичной эвристике даёт маршруты, сравнимые по длине с евклидово кратчайшими путями, при этом затрачивая меньше времени на выполнение по сравнению с алгоритмами, которые не используют прямую видимость. Однако, как и A*, Theta* не работает с графами, содержащими рёбра

с отрицательным весом.

Алгоритм Lazy Theta* представляет собой усовершенствованную версию алгоритма Theta*, разработанную специально для оптимизации вычислительных процессов. Его создание принадлежит группе исследователей – Алексу Нэшу, Свену Кёнигу и Крейгу Тови, которые представили данный метод в 2010 году [31]. Основной целью модификации было сокращение количества операций проверки прямой видимости между узлами при сохранении ключевых преимуществ оригинального алгоритма.

Как и Theta*, Lazy Theta* относится к категории A*-подобных алгоритмов, что подтверждается использованием эвристической функции $h(n)$ для оценки стоимости пути до конечной цели. Однако, в отличие от алгоритма Theta*, где проверка прямой видимости между соседом и родителем текущей вершины выполняется сразу, в улучшенном подходе эта проверка происходит только при извлечении вершины из открытого множества, что позволяет значительно сократить количество выполняемых операций.

В экспериментальных исследованиях авторы показали, что Lazy Theta* обеспечивает сопоставимое качество маршрутов при меньшем времени выполнения, по сравнению с Theta* и A*, особенно на сложных и больших по размеру картах [31]. Благодаря этим свойствам, алгоритм нашёл применение в задачах мобильной робототехники, игровой индустрии, автоматического вождения и геоинформационных систем.

Так как поставленная задача построения маршрута на пересеченной местности предполагает довольно большое количество узлов, а путь должен быть как можно более реалистичным, ввиду его использования людьми и транспортными средствами, то выбор базового алгоритма поиска кратчайшего пути во взвешенном графе был сделан в пользу Lazy Theta*. Однако, для корректного функционирования алгоритма в условиях реальной местности, его необходимо модифицировать для учета географических особенностей, таких как рельеф, водные и болотистые преграды, а также допустимые уклоны в зависимости от способа передвижения.

Создание графа можно разделить на несколько этапов.

На начальном этапе производится генерация сетки с заданным шагом с учетом геодезических расстояний. Создание сетки начинается от северо-западной (верхней левой) точки области и продолжается до юго-восточной (нижней правой). Таким образом, создается двумерная структура grid, в которой каждая строка содержит набор объектов, представляющих узлы сетки. Это обеспечивает дискретизацию всей заданной области с учетом точной геодезической кривизны и фиксированного шага между узлами, заданного в метрах.

Затем происходит сбор данных о водных объектах, которые находятся в пределах выбранной пользователем области. Это необходимо для того, чтобы при дальнейшем построении маршрута можно было учитывать непреодолимые преграды, такие как болота, реки, озера и другие водоемы.

Далее происходит сбор данных о высотах местности. Для учета рельефа при построении маршрута необходимо знать абсолютную высоту каждой точки сетки. Этот параметр напрямую влияет на энергетические затраты, определяет крутизну склонов и помогает исключать участки, непригодные для передвижения (например, с превышением допустимого угла подъема).

Таким образом, точки матрицы обогащаются данными о высотах, что впоследствии будет использоваться для учета рельефа при вычислении маршрута.

Заключительным этапом является привязка начальной и конечной точек маршрута, выбранных пользователем, к ближайшим доступным точкам на сформированной ранее сетке.

В результате выполнения всех вышеописанных этапов будут подготовлены данные, необходимые для последующего вычисления кратчайшего маршрута во взвешенном графе, представленном сеткой.

Для решения задачи определения кратчайшего маршрута был использован алгоритм Lazy Theta*, который был модифицирован для учета особенностей местности, таких как рельеф, водные преграды, тип поверхности и предельный угол наклона для выбранного способа перемещения.

Модифицированный алгоритм Lazy Theta* может быть описан в следующих шагах:

Задаются стартовая и целевая вершины, соответствующие начальной и конечной точкам на сетке. Стартовому узлу присваивается $g = 0$, он помещается в очередь с приоритетом, представляющую открытое множество, и устанавливается как собственный родитель.

Пока очередь не пуста:

Выбирается узел n с минимальным значением $f(n) = g(n) + h(n)$, где $g(n)$ - стоимость пройденного пути, а $h(n)$ - расстояние до финальной точки маршрута.

Пересматривается родитель узла. Если прямая видимость потеряна, то родителем текущего узла становится ближайший доступный сосед.

Если это финальная вершина – маршрут найден, начинается его восстановление.

Вершина добавляется в закрытое множество посещенных.

Для всех соседей (8 направлений) текущего узла осуществляется проверка допустимости движения. Сосед должен быть внутри сетки, на суше, путь до него не может пересекать водоем, а угол подъема не должен превышать предельный для выбранного способа передвижения.

Для каждой подходящей соседней вершины происходит проверка: если расстояние с учетом перепада высот от соседа до родителя текущего узла меньше или равно сумме стоимости пройденного пути от текущего узла до его родителя и расстояния с учетом перепада высот между текущим узлом и соседом, то

Если сумма стоимости пройденного пути родителя текущего узла и расстояния с учетом перепада высот от соседа до родителя текущего узла меньше накопленной стоимости пройденного пути соседа, то новым

родителем соседа становится родитель текущего узла, а в стоимость пройденного пути устанавливается сумма стоимости пройденного пути родителя и расстояния с учетом перепада высот от соседа до родителя текущего узла;

Иначе если сумма стоимости пройденного пути текущего узла и расстояния с учетом перепада высоты между текущим узлом и соседом меньше стоимости пройденного пути соседа, то новым родителем соседа становится текущий узел, а в стоимость пройденного пути устанавливается сумма стоимости пройденного пути текущего узла и расстояния с учетом перепада высоты между текущим узлом и соседом.

Затем происходит обновление эвристики расстояния соседа. Если новая стоимость пройденного пути соседа меньше старой (если сосед обрабатывается впервые, то его старая $g=+\infty$), то в h соседа устанавливается эвристика расстояния между соседом и финальной точкой маршрута, а также если сосед обрабатывается впервые, то он помещается в множество открытых узлов.

IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

A. Первый вычислительный эксперимент

В данном вычислительном эксперименте проверяется корректность работы алгоритма. Программа должна вычислить кратчайший путь между заданными начальными и конечными точками внутри области поиска. Путь должен огибать водные преграды, а также учитывать рельеф.

На рисунке 3 видно, что маршрут огибает озеро, учитывает рельеф местности, что говорит о правильности работы программы.

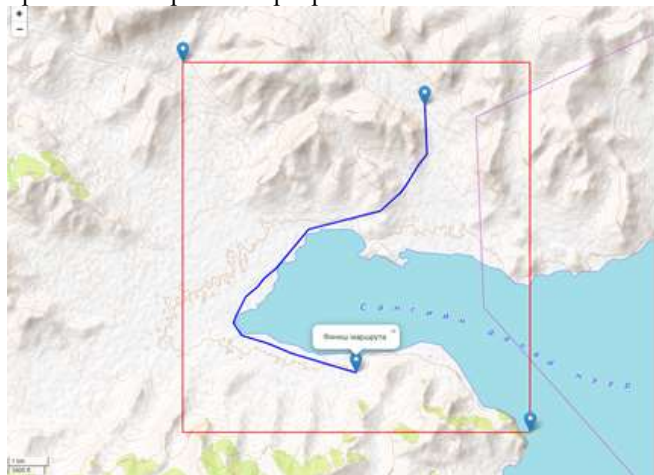


Рис. 3: Результат первого вычислительного эксперимента

B. Второй вычислительный эксперимент

Во втором вычислительном эксперименте проверяется способность программы учитывать выбранный способ передвижения.

На рисунке 4 видно, что маршрут движения, построенный для автомобиля, несколько длиннее, пути, изображенного на рисунке 5, который вычислен для пешего способа передвижения, по причине того, что пролегает по более пологим участкам местности. Это говорит о правильности работы программы.

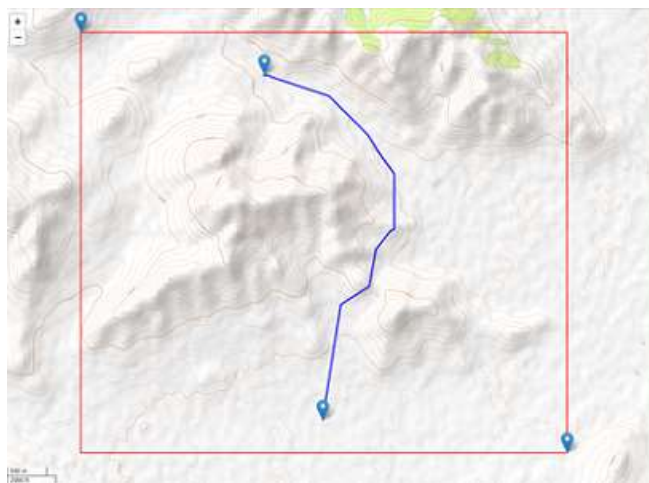


Рис. 4: Результат второго вычислительного эксперимента. Автомобильный маршрут

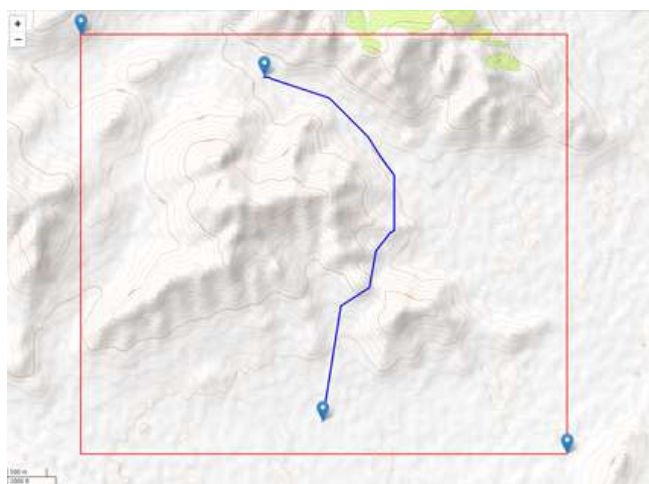


Рис. 5: Результат второго вычислительного эксперимента. Пеший маршрут

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была разработана система построения маршрута в условиях пересеченной местности, учитывающая сложность рельефа, тип поверхности и способ передвижения. Решение этой задачи имеет высокую практическую значимость, поскольку существующие навигационные системы зачастую оказываются малоэффективными в условиях отсутствия дорожной инфраструктуры, что критически важно для спасательных операций, военной логистики, экспедиционной деятельности и активного туризма.

В ходе исследования был проведен анализ существующих подходов к моделированию местности и поиску кратчайших путей, в результате которого был выбран и модифицирован метод построения взвешенного графа, узлы которого соответствуют точкам сетки, наложенной на карту местности, а для поиска маршрута был адаптирован алгоритм Lazy Theta*, обеспечивающий баланс между точностью и вычислительной эффективностью.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили работоспособность системы и ее способность строить пути в условиях сложного рельефа.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Kim, J. Fast Route Planner Considering Terrain Information. *Sensors* 2022, 22, 4518. <https://doi.org/10.3390/s22124518>
- [2] Saad, S.; Salameh, A.I.; Abdallah, S.; El-Moursy, A.; Cheng, C.-T. A Composite Metric Routing Approach for Energy-Efficient Shortest Path Planning on Natural Terrains. *Appl. Sci.* 2021, 11, 6939. <https://doi.org/10.3390/app11156939>
- [3] On terrain traversability analysis in unstructured environments: recent advances in forest applications, Afonso E. Carvalho, David Portugal, Paulo Peixoto, *Intelligent Service Robotics* (2025) 18:195-213. <https://doi.org/10.1007/s11370-025-00591-4>
- [4] Nash, A., Koenig, S., & Tovey, C. (2010). Lazy Theta*: Any-Angle Path Planning and Path Length Analysis in 3D. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 24(1), 147-154. <https://doi.org/10.1609/aaai.v24i1.7566>
- [5] R. Rey, J. A. Cobano, L. Merino and F. Caballero, "Generalized Lazy-Theta* for 3D path planning considering non-uniform costs," 2022 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Dubrovnik, Croatia, 2022, pp. 664-669. <https://doi.org/10.1109/ICUAS54217.2022.9836069>
- [6] R. Rey, J. A. Cobano, L. Merino and F. Caballero, "Adaptation of Lazy-Theta* for UAS 3D path planning considering safety costs," 2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Athens, Greece, 2021, pp. 387-393. <https://doi.org/10.1109/ICUAS541884.2021.9476772>
- [7] Gao, Z.; Wan, L.; Cai, M.; Xu, X. Research on Lazy Theta* Route Planning Algorithm Based on Grid Point Optimization. *Appl. Sci.* 2022, 12, 10601. <https://doi.org/10.3390/app122010601>
- [8] Faria, M.; Marin, R.; Popović, M.; Maza, I.; Viguri, A. Efficient Lazy Theta* Path Planning over a Sparse Grid to Explore Large 3D Volumes with a Multirotor UAV. *Sensors* 2019, 19, 174. <https://doi.org/10.3390/s19010174>
- [9] Meng-shun Yuan, Tong-le Zhou, Mou Chen, Improved lazy theta* algorithm based on octree map for path planning of UAV, *Defence Technology*, Volume 23, 2023, Pages 8-18. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2022.01.006>
- [10] Garcia, M., Viguria, A. & Ollero, A. Dynamic Graph-Search Algorithm for Global Path Planning in Presence of Hazardous Weather. *J. Intell. Robot. Syst.* 69, 285–295 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10846-012-9704-7>
- [11] Yuan, M. S. Improved lazy theta* algorithm based on octree map for path planning of UAV / M. S. Yuan, T. L. Zhou, M. Chen // *Defence Technology*. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2022.01.006>
- [12] Chirpa, L. Towards a Trajectory Planning Concept: Augmenting Path Planning Methods by Considering Speed Limit Constraints / L. Chirpa, H. Osborne // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. – 2014. – Vol. 75, No. 2. – P. 243-270. <https://doi.org/10.1007/s10846-013-9886-7>
- [13] Bézier Curves-Based Optimal Trajectory Design for Multirotor UAVs with Any-Angle Pathfinding Algorithms / H. Al. Satai, M. M. A. Zahra, Z. I. Rasool [et al.] // *Sensors*. – 2021. – Vol. 21, No. 7. – P. 2460. <https://doi.org/10.3390/s21072460>. – EDN YMLDRK.
- [14] Balstrøm, T. (2002). On identifying the most time-saving walking route in a trackless mountainous terrain. *Geografisk Tidsskrift-Danish Journal of Geography*, 102(1), 51–58. <https://doi.org/10.1080/00167223.2002.10649465>
- [15] Козуб, Д. В. Система построения маршрутов на пересеченной местности на основе графа видимости / Д. В. Козуб, Ю. С. Корухова // *Научный сервис в сети Интернет*. – 2022. – № 24. – С. 340-349. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-15>. – EDN TMHJVH.
- [16] Исследование эвристических алгоритмов в задачах прокладки и оптимизация маршрутов в среде с препятствиями / Р. А. Нейдорф, В. В. Полях, И. В. Черногоров, О. Т. Ярахмедов // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2016. – № 3(176). – С. 127-143. – EDN WABVYL.
- [17] Крутько, Д. А. Методы построения маршрутов вне населенных пунктов на основе GPS-данных / Д. А. Крутько, А. С. Каташников, В. В. Бурыченко // *Сибирский аэрокосмический журнал*. – 2022. – Т. 23, № 2. – С. 168-176. <https://doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-2-168-176>. – EDN JARJRY.
- [18] Клочкова, Е. Н. Обоснование выбора алгоритма поиска пути решения задач построения маршрута к месту назначения / Е. Н. Клочкова // *Вестник Московского университета МВД России*. – 2015. – № 5. – С. 205-209. – EDN TTTZMP.
- [19] Крутько, Д. А. Проблема автоматизации построения схем маршрутов пешего туризма в горных массивах Красноярского края / Д. А. Крутько // *Актуальные проблемы авиации и космонавтики*, 2021. – Т. 2. – С. 260–262.
- [20] Крутько, Д. А. Проблема поиска кратчайшего пути в трехмерном пространстве на территории Торгашинского хребта / Д. А. Крутько // *Актуальные проблемы авиации и космонавтики: сборник материалов VIII Международной научно-практической конференции, посвященной Дню космонавтики: в 3 т., Красноярск, 11–15 апреля 2022 года. Том 2.* – Красноярск: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева", 2022. – С. 142-144. – EDN MVZTHK.
- [21] Патент № 2594374 С2 Российская Федерация, МПК G01C 21/34. способ построения маршрута передвижения на пересеченной местности: № 2014145708/28: заявл. 13.11.2014: опубл. 20.08.2016 / И. И. Шуклин, Н. И. Руднев, А. М. Шлык; заявитель Российская Федерация, от имени которой выступает Министерство обороны Российской Федерации. – EDN UOPGAJ.
- [22] Тикуннов, В. С., Капранов, Е. Г. Основы геоинформатики. Кн. 1. – М.: Академия, 2008. – 384 с.
- [23] Лайкин, В. И., Упоров, Г. А. Геоинформатика: учебное пособие / Лайкин В.И., Упоров Г.А. – Комсомольск-на-Амуре: Изд-во АмГПУ, 2010. – 162 с.
- [24] Патент № 2439496 С1 Российская Федерация, МПК G01C 21/34. способ прокладывания маршрута передвижения на пересеченной местности: № 2010129415/28: заявл. 15.07.2010: опубл. 10.01.2012 / А. И. Мухин, А. М. Шлык, Н. И. Руднев; заявитель Федеральное государственное унитарное предприятие "Курский научно-исследовательский институт" Министерства обороны Российской Федерации. – EDN HDZWBW.
- [25] Агеев П. А., Кудрявцев А. М., Смирнов А. А. Процедуры построения маршрутов движения техники по пересеченной местности на основе цифровых моделей местности // *Известия ТулГУ. Технические науки*. 2019. Вып. 9. С. 268–275.
- [26] Дейкстра, Э. В. Заметка о двух задачах, связанных с графами // *Численные методы*. – 1959. – Т. 1. – С. 269–271.
- [27] Харт, П., Нильссон Н., Рафаэль Б. Формальные основы эвристического поиска кратчайшего пути // *Системы управления и кибернетика*. – 1968. – Т. 4, № 2. – С. 100–107.
- [28] Нэш, А., Кёниг, С., Тови, К. Алгоритм Theta*: планирование маршрута с произвольными углами на решётках // *Материалы конференции по искусственному интеллекту AAAI*. – 2007. – Т. 22, № 2. – С. 1177–1183.
- [29] Брезенхэм, Д. Алгоритм управления цифровым плоттером // *Журнал систем IBM*. – 1965. – Т. 4, № 1. – С. 25–30.
- [30] Нэш, А., Кёниг, С., Тови, К. Алгоритм Theta*: теория и применение // *Журнал AI Communications*. – 2009. – Т. 22, № 1. – С. 39–55.
- [31] Нэш, А., Кёниг, С., Тови, К. Lazy Theta*: алгоритм планирования маршрута с учётом произвольных углов и анализа длины пути // *Материалы конференции по искусственному интеллекту AAAI*. – 2010. – С. 147–153.

An Approach to Constructing the Shortest Energy-Efficient Route over Rough Terrain

M.D. Ivanov. O.V. Avseeva

Abstract - The problem of route construction in rugged terrain without roads, with elevation changes and impassable sections, is considered. To solve the problem, the terrain is represented as a graph by overlaying a regular grid.

This paper considers two methods for graph construction, of which the chosen method includes both the sides and diagonals of a quadrilateral of the overlaying regular grid. The edge weights of the resulting graph consist of a generalized arc coefficient, which characterizes the relative energy expenditure of movement, and a reduced arc weight. The reduced arc weight is a function of the actual arc length, the terrain, and travel constraints.

To determine the shortest route on the graph, four search algorithms were considered: Dijkstra's algorithm, A*, Theta*, and Lazy Theta*. Lazy Theta* was chosen for this problem, as it achieves a compromise between path quality and throughput. To ensure the algorithm functions correctly in real-world conditions, it was modified to account for geographic features such as terrain, water and marshy obstacles, and acceptable slopes depending on the mode of travel.

The overall algorithm for solving the problem consists of several steps. First, the entire specified area is discretized, taking into account the precise geodetic curvature and a fixed step between nodes, specified in meters. When constructing the grid, data on water bodies within the user-selected area and terrain elevation are taken into account. Then, the start and end points of the route, selected by the user, are linked to the closest available points on the generated grid. Route search is performed using a modified Lazy Theta* algorithm. Bresenham's algorithm is used to verify line-of-sight between route points.

A web application has been developed that allows route construction for both pedestrian and vehicle travel.

Keywords - Pathfinding, displacement graph, Lazy Theta* algorithm

REFERENCES

- [1] Kim, J. Fast Route Planner Considering Terrain Information. *Sensors*. 2022, 22, 4518. <https://doi.org/10.3390/s22124518>
- [2] Saad, S.; Salameh, A.I.; Abdallah, S.; El-Moursy, A.; Cheng, C.-T. A Composite Metric Routing Approach for Energy-Efficient Shortest Path Planning on Natural Terrains. *Appl. Sci.* 2021, 11, 6939. <https://doi.org/10.3390/app1115693>
- [3] On terrain traversability analysis in unstructured environments: recent advances in forest applications, Afonso E. Carvalho, David Portugal, Paulo Peixoto, *Intelligent Service Robotics* (2025) 18:195–213. <https://doi.org/10.1007/s11370-025-00591-4>
- [4] Nash, A., Koenig, S., & Tovey, C. (2010). Lazy Theta*: Any-Angle Path Planning and Path Length Analysis in 3D. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 24(1), 147-154. <https://doi.org/10.1609/aaai.v24i1.7566>
- [5] R. Rey, J. A. Cobano, L. Merino and F. Caballero, "Generalized Lazy-Theta* for 3D path planning considering non-uniform costs," 2022 *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Dubrovnik, Croatia, 2022, pp. 664-669. <https://doi.org/10.1109/ICUAS54217.2022.9836069>
- [6] R. Rey, J. A. Cobano, L. Merino and F. Caballero, "Adaptation of Lazy-Theta* for UAS 3D path planning considering safety costs," 2021 *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Athens, Greece, 2021, pp. 387-393. <https://doi.org/10.1109/ICUAS51884.2021.9476772>
- [7] Gao, Z.; Wan, L.; Cai, M.; Xu, X. Research on Lazy Theta* Route Planning Algorithm Based on Grid Point Optimization. *Appl. Sci.* 2022, 12, 10601. <https://doi.org/10.3390/app122010601>
- [8] Faria, M.; Marín, R.; Popović, M.; Maza, I.; Viguri, A. Efficient Lazy Theta* Path Planning over a Sparse Grid to Explore Large 3D Volumes with a Multirotor UAV. *Sensors*. 2019, 19, 174. <https://doi.org/10.3390/s19010174>
- [9] Meng-shun Yuan, Tong-le Zhou, Mou Chen, Improved lazy theta* algorithm based on octree map for path planning of UAV, *Defence Technology*, Volume 23, 2023, Pages 8-18. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2022.01.006>
- [10] Garcia, M., Viguria, A. & Ollero, A. Dynamic Graph-Search Algorithm for Global Path Planning in Presence of Hazardous Weather. *J. Intell. Robot. Syst.* 69, 285–295 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10846-012-9704-7>
- [11] Yuan, M. S., et al. Improved lazy theta* algorithm based on octree map for path planning of UAV. *Defence Technology*. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2022.01.006>. EDN ORNZTZ.
- [12] Chrpá, L., et al. Towards a Trajectory Planning Concept: Augmenting Path Planning Methods by Considering Speed Limit Constraints. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. 2014. Vol. 75, No. 2. P. 243-270. <https://doi.org/10.1007/s10846-013-9886-7>. EDN SYBUNY.
- [13] Satai, H. AL, et al. Bézier Curves-Based Optimal Trajectory Design for Multirotor UAVs with Any-Angle Pathfinding Algorithms. *Sensors*. 2021. Vol. 21, No. 7. P. 2460. <https://doi.org/10.3390/s21072460>. EDN YMLDRK.
- [14] Balström, T. (2002). On identifying the most time-saving walking route in a trackless mountainous terrain. *Geografisk Tidsskrift-Danish Journal of Geography*, 102(1), 51–58. <https://doi.org/10.1080/00167223.2002.10649465>
- [15] Kozub, D.V., Korukhova, Y.S. Off-Road Routing System Based On Visibility Graph. In: *Scientific Services & Internet*. 2022. No. 24. pp. 340-349. <https://doi.org/10.20948/abrau-2022-15>. EDN TMHJVH. (In Russ., abstract in Eng.)
- [16] Neydorf, R.A., et al. Study of heuristic algorithms in planning and optimization of routes problem in the environment with obstacles. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2016. No. 3(176). pp. 127-143. EDN WABVYL. (In Russ., abstract in Eng.)
- [17] Krut'ko, D.A., et al. Methods for constructing routes outside of settlements on the basis of GPS data. *Siberian Aerospace Journal*. 2022. Vol. 23, issue 2. Pp. 168-176. <https://doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-2-168-176>. EDN JARJRY. (In Russ., abstract in Eng.)
- [18] Klochkova, E. N. Obosnovanie vybora algoritma poiska puti resheniya zadach postroeniya marshruta k mestu naznacheniya / E. N. Klochkova // *Vestnik Moskovskogo universiteta MVD Rossii*. – 2015. – № 5. – S. 205-209. – EDN TTZMOP. (In Russ., abstract in Eng.)
- [19] Krut'ko, D. A. Problema avtomatizacii postroeniya skhem marshrutov peshego turizma v gornyh massivah Krasnoyarskogo kraya / D. A. Krut'ko // *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики*, 2021. – T. 2. – S. 260–262. (In Russ., abstract in Eng.)
- [20] Krut'ko, D. A. Problema poiska kratchajshego puti v trekhmernom prostranstve na territorii Torgashinskogo hrebta / D. A. Krut'ko // *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики: sbornik materialov VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii, posvyashchennoj Dnyu kosmonavтики: v 3 t.*, Krasnoyarsk, 11–15 aprelya 2022 goda. Tom 2. – Krasnoyarsk: Federal'noe gosudarstvennoe byudzhethoe obrazovatel'noe uchrezhdenie vysshego obrazovaniya "Sibirskij gosudarstvennyj universitet nauki i tekhnologii imeni akademika M.F. Reshetneva", 2022. – S. 142-144. – EDN MVZTHK. (In Russ., abstract in Eng.)
- [21] Patent № 2594374 C2 Rossijskaya Federaciya, MPK G01C 21/34. sposob postroeniya marshruta peredvizheniya na peresechennoj mestnosti: № 2014145708/28: zayavl. 13.11.2014: opubl. 20.08.2016 / I. I. SHuklin, N. I. Rudnev, A. M. SHlyk; zayavitel' Rossijskaya

- Federaciya, ot imeni kotoroj vystupaet Ministerstvo oborony Rossijskoj Federacii. – EDN UOPGAJ. (In Russ.)
- [22] Tikunov, V. S., Kapralov, E. G. Osnovy geoinformatiki. Kn. 1. – M.: Akademiya, 2008. – 384 s. (In Russ.)
- [23] Lajkin, V. I., Uporov, G. A. Geoinformatika: uchebnoe posobie / Lajkin V.I., Uporov G.A. – Komsomol'sk-na-Amure: Izd-vo AmGPGU, 2010. – 162 s. (In Russ.)
- [24] Patent № 2439496 C1 Rossijskaya Federaciya, MPK G01C 21/34. sposob prokladyvaniya marshruta peredvizheniya na peresechennoj mestnosti: № 2010129415/28: zayavl. 15.07.2010: opubl. 10.01.2012 / A. I. Muhin, A. M. SHlyk, N. I. Rudnev; zayavitel' Federal'noe gosudarstvennoe unitarnoe predpriyatie "Kurskij nauchno-issledovatel'skij institut" Ministerstva oborony Rossijskoj Federacii. – EDN HDZWBW. (In Russ.)
- [25] Ageev P. A., Kudryavcev A. M., Smirnov A. A. Procedury postroeniya marshrutov dvizheniya tekhniki po peresechennoj mestnosti na osnove cifrovyyh modelej mestnosti // Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki. 2019. Vyp. 9. S. 268–275. (In Russ., abstract in Eng.)
- [26] Dejkstra, E. V. Zametka o dvuh zadachah, svyazannyh s grafami // CHislennyye metody. – 1959. – T. 1. – S. 269–271. (In Russ., abstract in Eng.)
- [27] Hart, P., Nil'sson N., Rafael' B. Formal'nye osnovy evristicheskogo poiska kratchajshogo puti // Sistemy upravleniya i kibernetika. – 1968. – T. 4, № 2. – S. 100–107. (In Russ., abstract in Eng.)
- [28] Nesh, A., Kyonig, S., Tovi, K. Algoritm Theta*: planirovanie marshruta s proizvol'nymi uglami na resh'yotkah // Materialy konferencii po iskusstvennomu intellektu AAAI. – 2007. – T. 22, № 2. – S. 1177–1183. (In Russ., abstract in Eng.)
- [29] Brezenhem, D. Algoritm upravleniya cifrovym plotterom // ZHumal sistem IBM. – 1965. – T. 4, № 1. – S. 25–30. (In Russ., abstract in Eng.)
- [30] Nesh, A., Kyonig, S., Tovi, K. Algoritm Theta*: teoriya i primeneniye // ZHumal AI Communications. – 2009. – T. 22, № 1. – S. 39–55. (In Russ., abstract in Eng.)
- [31] Nesh, A., Kyonig, S., Tovi, K. Lazy Theta*: algoritm planirovaniya marshruta s uchyotom proizvol'nyh uglov i analiza dliny puti // Materialy konferencii po iskusstvennomu intellektu AAAI. – 2010. – S. 147–153. (In Russ., abstract in Eng.)