

Об одном точном решении линейного уравнения Шредингера, описывающего распространение фемтосекундных импульсов

С. В. Степаненко

Аннотация— В настоящей работе рассматривается модель распространения фемтосекундного лазерного импульса в линейной среде, которая описывается уравнением Шредингера. При исследовании задач лазерной физики, описываемых уравнениями Шредингера, особое место занимает построение их точных решений. В работе предложен подход к построению точного решения, который заключается в преобразовании уравнения Шредингера к уравнению Эйри и поиску его точного решения. Следует отметить, что даже в случае распространения лазерного импульса в линейной среде, точных решений для уравнения, рассматриваемого в работе, ранее найдено не было, и эта задача является актуальной. В работе найдено точное решение для уравнения Шредингера в виде произведения экспоненциальной функции на функцию Эйри, а также приведены линейно независимые решения уравнения Эйри, свойства которых используются при анализе начальных распределений лазерного импульса. Отметим, что найденное решение включает в себя свободный параметр, отвечающий за изменение амплитуды колебаний решения на одной из границ области, рассматриваемой в задаче. Для полученного решения графически проиллюстрированы некоторые типы начальных распределений, которые соответствуют этому решению.

Ключевые слова— фемтосекундные импульсы, точное решение, линейное уравнение Шредингера.

I. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия довольно интенсивно развивается оптика малопериодных фемтосекундных лазерных импульсов и задачи по моделированию распространения таких импульсов рассматриваются в различных областях, включая нелинейную оптику, медицинскую диагностику, управление химическими реакциями и др.

Для описания процессов распространения лазерного излучения используются различные подходы. Наиболее общее представление даёт система уравнений Максвелла, однако ее моделирование требует трудоемких вычислений и не является эффективным подходом для компьютерного моделирования. Другой

подход, связанный с описанием процесса распространения лазерного излучения, заключается в использовании приближений метода медленно изменяющихся амплитуд во времени и по пространственной координате, вдоль которой распространяется излучение. Этот подход дает довольно точные результаты для лазерных импульсов, длительность которых более 40 фемтосекунд. Для описания распространения таких импульсов в [1] было предложено нелинейное уравнение Шредингера с первой производной от нелинейного отклика среды. Это уравнение широко используется для описания распространения фемтосекундных импульсов в нелинейных оптических волокнах [2].

Для более точного описания распространения таких импульсов (в работах [3], [4]) впервые было предложено обобщенное уравнение Шредингера, содержащее производную по времени от нелинейного отклика среды, а также смешанные производные по времени и координате, вдоль которой распространяется излучение. В отличие от уравнения из [1], обобщенное уравнение записывается в приближениях для медленно изменяющейся амплитуды и фазы, а также условия о том, что групповая и фазовая скорости импульса отличаются незначительно. В работе [5] предложено оригинальное преобразование обобщенного уравнения Шредингера, которое позволяет путем введения новых функций привести его к виду, не содержащему производных от нелинейного отклика среды, а также смешанных производных. Такой вид уравнения позволяет построить инварианты рассматриваемой задачи (энергии, спектральный, а также Гамильтониан, и другие). Эти инварианты зависят не только от интенсивности импульса, но и от его фазы.

Особый интерес представляет задача поиска точного решения, так как даже в случае распространения лазерного импульса в линейной среде точных решений ранее получено не было.

В настоящей работе рассматривается модель распространения фемтосекундного импульса на основе обобщенного уравнения Шредингера для случая распространения импульса в линейной среде и предлагается подход к получению ее точного решения. Преобразование уравнения, представленное в работе, заключающееся в переходе к новой функции, позволяет привести исходное уравнение к уравнению специального вида (уравнению Эйри) и свести задачу к его решению.

Статья получена 11 июня 2019.

Степаненко Светлана Владимировна, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (e-mail: s.stepanenko@cs.msu.ru).

Известно, что решения уравнения Эйри используются в различных областях физики и играют важную роль в оптике и квантовой механике. Впервые в 1979 году в работе [6] по квантовой механике было рассмотрено решение уравнения Шредингера для свободной частицы в виде функции Эйри и показано, что «пакет Эйри» не изменяется с течением времени. Свойства и приложения этих функций широко изучены и приведены, например, в [7]–[11]. В работе [12] решение уравнения Шредингера (в случае сферически симметричного потенциала) было получено в виде, содержащем специальную функцию Эйри. В работе [13] было показано, что в случае выбора начального Гауссова распределения, специальные функции Эйри являются решением стандартного уравнения Шредингера в случае учета дисперсии третьего порядка. Также, для уравнений Шредингера, решения были получены в работах [14]–[19]. Также стоит отметить и другие работы по специальным функциям Эйри [20]–[26].

В настоящей работе построено точное решение линейного обобщенного уравнения Шредингера в виде произведения экспоненциальной функции на специальную функцию Эйри для случая распространения малопериодного фемтосекундного импульса в линейной среде, а также проанализирован вид решения в зависимости от параметров дифференциальной задачи, построены графические иллюстрации характерных частных случаев решения задачи.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Распространение лазерного импульса фемтосекундной длительности в линейной среде с учетом влияния дифракции оптического излучения и с учетом дисперсии второго порядка описывается следующим безразмерным обобщенным уравнением Шредингера:

$$\left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial A}{\partial z} + iD_2 \left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + iD_x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

которое может быть рассмотрено в области $(z, x, t) \in \Omega = (0, L_z] \times (0, L_x) \times (0, L_t)$.

Здесь функция $A(z, x, t)$ – медленно изменяющаяся во времени и пространстве комплексная амплитуда, связанная с напряженностью электрического поля следующим соотношением:

$$E(z, x, t) = A(z, x, t) \exp(-i\omega t - ikz) + \text{к.с.}, \quad (2)$$

где к.с. означает комплексное сопряжение, ω – безразмерная частота световой волны, k – ее волновое число.

Комплексная амплитуда импульса $A(z, x, t)$ нормирована на квадратный корень из максимального значения интенсивности волнового пакета на входе в линейную среду. Лазерный импульс распространяется вдоль координаты z , которая измеряется в единицах характерной длины среды, t – нормированное на длительность импульса время в сопровождающей его системе координат, D_2 – коэффициент, равный отношению длины среды к дисперсионной длине, D_x – коэффициент, характеризующий дифракцию среды, γ – параметр, обратно пропорциональный произведению длительности импульса на его частоту, L_z, L_x, L_t –

безразмерные границы области, в пределах которой анализируется процесс распространения импульса.

Отметим, что для построения точного решения в данной работе используется теория, связанная с уравнением специального вида, а именно – с уравнением Эйри. Следующий параграф посвящен особенностям этого уравнения, а также его решениям.

III. УРАВНЕНИЕ ЭЙРИ

Уравнение Эйри – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое было впервые рассмотрено и исследовано в 1838 году Британским астрономом Дж. Эйри:

$$F''(x) - xF(x) = 0. \quad (3)$$

Особенность этого уравнения заключается в том, что оно имеет на действительной оси точку, в которой вид решения меняется с колеблющегося на экспоненциальный. У этого уравнения существуют два линейно независимых решения (см. Рис. 1):

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt, \quad (4)$$

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt. \quad (5)$$

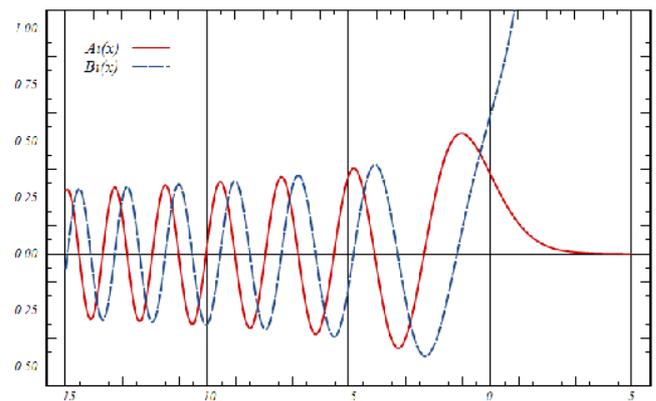


Рис. 1. Точные решения $Ai(x)$ и $Bi(x)$ уравнения Эйри (3).

Первое решение $Ai(x)$ представляет собой несобственный интеграл от косинуса и имеет на минус бесконечности колебательное поведение с постепенным уменьшением амплитуды колебаний, а на плюс бесконечности монотонно убывает по экспоненциальному закону. Второе решение $Bi(x)$ имеет ту же амплитуду колебаний на минус бесконечности, что и первое, но отличается по фазе на $\pi/2$, а на плюс бесконечности решение возрастает по экспоненциальному закону.

Теперь перейдем к предлагаемому подходу, который был применен в настоящей работе для получения точных решений для линейного обобщенного уравнения Шредингера.

IV. ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Основная идея построения решения заключается в переходе к новой функции, которая представляет собой произведение экспоненциальной функции на некоторую

функцию действительного аргумента, вид которой обеспечит переход уравнения Шредингера в уравнение Эйри, решение которого известно и представляет собой экспоненциально убывающую функцию $Ai(x)$.

Преобразуем уравнение (1) к уравнению Эйри, используя следующую подстановку:

$$A(z, x, t) = \exp(-iaz(t + x - afz - abz^2) - izm + it/\gamma) F(c(t + x - ez - dz^2) + m) = \exp(i\varphi(z, x, t)) F(c(t + x - ez - dz^2) + m), \quad (6)$$

где a, b, c, d, e, f, m - это действительные коэффициенты, а функция $\varphi(z, x, t)$ - функция действительного аргумента.

Покажем, что уравнение (1) может быть сведено к уравнению следующего вида:

$$F''(\eta) - \eta F(\eta) = 0, \quad (7)$$

решением которого является специальная функция Эйри $F = Ai(\eta)$ от действительного аргумента $\eta(z, x, t)$:

$$\eta(z, x, t) = c(t + x - ez - dz^2) + m. \quad (8)$$

Учитывая вид подстановки (6), получаем следующие соотношения на производные от функции $A(z, x, t)$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \exp(i\varphi(z, x, t))(c^2 F'' - 2ic\left(\frac{1}{\gamma} - az\right)F' - \left(\frac{1}{\gamma} - az\right)^2 F),$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \exp(i\varphi(z, x, t))((-ia(t + x) - im + 2ia^2fz + 3ia^2bz^2)F - (ce + 2cdz)F'),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \exp(i\varphi(z, x, t))(c^2 F'' - 2icazF' - a^2z^2F).$$

В результате получаем следующее уравнение:

$$D_2c^22F'' + 2ic(z(d - aD_2) + 1/\gamma(2D_2 - D_x) + e)F' - (D_2(1/\gamma - az))^2 + a(t + x) + m - 2a^2fz - 3a^2z^2b + azD_x/\gamma)F = 0. \quad (9)$$

Выберем параметры d и e так, чтобы коэффициент при производной первого порядка от специальной функции Эйри $F(\eta)$ был равен нулю:

$$d = D_2 a, \quad e = -(2D_2 - D_x)/\gamma. \quad (10)$$

Учитывая соотношения (9), (10), уравнение (1) преобразуется к следующему виду:

$$F'' - \frac{a}{D_2c^2}[(t + x) + 1/\gamma(m + D_2/\gamma^2) - (2D_2/\gamma + 2af - D_x/\gamma)az - (3b - D_2)az^2]F = 0. \quad (11)$$

Учитывая вид аргумента η в уравнении Эйри (7) и вид параметров d и e (10), получаем следующий набор коэффициентов:

$$c = a/(D_2c^2) = (a/D_2)^{\frac{1}{3}}, \\ m = 1/(D_2c^2)(m + D_2/\gamma^2) = D_2/\left(\gamma^2\left(D_2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 1\right)\right), \\ f = -(2D_2 - D_x)/(\alpha\gamma), \quad b = \frac{2}{3}D_2.$$

Отметим, что коэффициент a является свободным параметром уравнения (1) и отвечает за изменение амплитуды колебаний решения.

Таким образом, решение уравнения (1) принимает вид:

$$A(z, x, t) = \exp(-iaz(t + x + (2D_2 - D_x)z/\gamma - 2aD_2z^2/3) - izD_2/(\gamma^2(D_2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 1)) + it/\gamma) Ai(\eta), \quad (12)$$

где аргумент специальной функции Эйри $\eta(z, x, t)$ имеет следующий вид:

$$\eta = (a/D_2)^{\frac{1}{3}}(t + x + (2D_2 - D_x)z - D_2az^2) + D_2/\left(\gamma^2\left(D_2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 1\right)\right). \quad (13)$$

Отметим, что если $D_2a^2 = 1$, то решение уравнения (12) не существует. В этом случае необходимо использовать другой подход при поиске точного решения обобщенного линейного уравнения (1).

V. ВИД НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

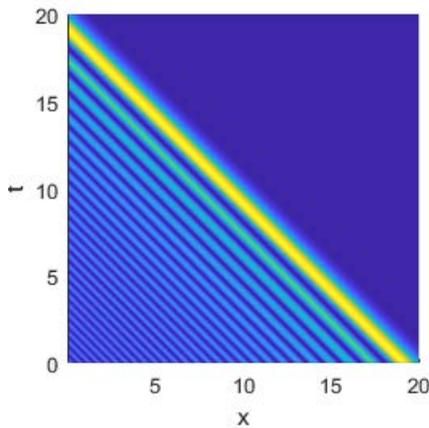
При моделировании дифференциальной задачи и при анализе ее точного решения особое внимание уделяется начальному распределению импульса на входе в среду, в которой рассматривается его распространение.

Например, в работе [13] было получено решение для нелинейного уравнения Шредингера в виде, содержащем специальную функцию Эйри при рассмотрении задачи распространения лазерного импульса с начальным распределением в виде гауссова пучка. В работе [15] начальное распределение было выбрано в виде произведения специальной функции Эйри на экспоненциально убывающую функцию, для которого было получено решение в рамках нелинейного уравнения Шредингера с учетом дисперсии третьего порядка.

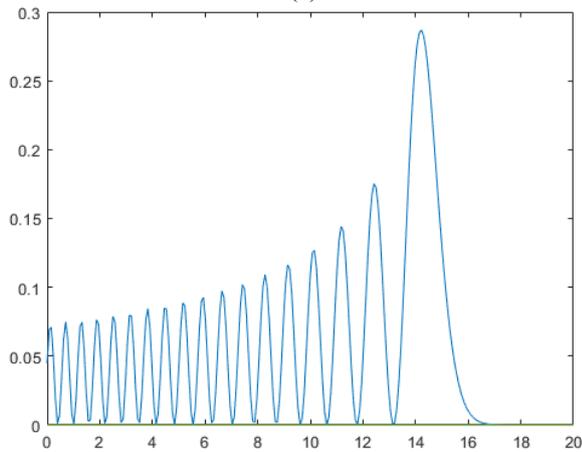
Решению (13), построенному в настоящей работе, соответствует следующий класс функций, в зависимости от параметров дифференциальной задачи γ, D_2 , а также свободного параметра a :

$$A_0(x, t) = \exp(it/\gamma)Ai\left(\left(a/D_2\right)^{\frac{1}{3}}(t + x) + D_2/(\gamma^2(D_2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 1))\right). \quad (14)$$

Проанализируем структуру начальных распределений (14), которые соответствуют построенному решению (13) в зависимости от выбора параметров γ, a, D_2 . Зафиксируем параметры задачи и построим интенсивность начального распределения (14) и ее сечение в фиксированный момент времени t (см. Рис. 2).



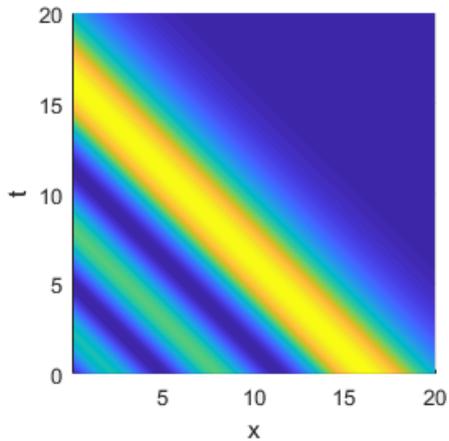
(a)



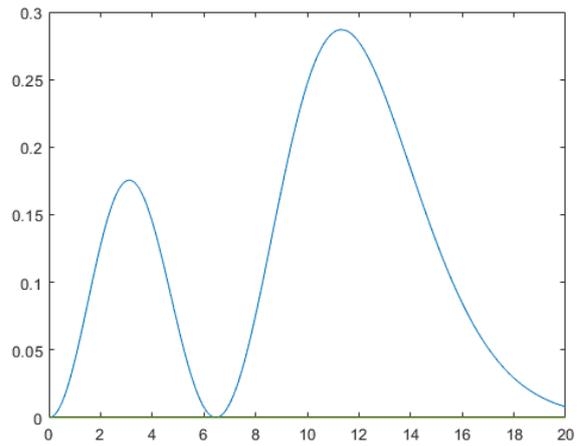
(б)

Рис. 2. (а) - Интенсивность начального распределения комплексной амплитуды (14) для параметров: $\gamma = 10$, $D_2 = 2$, $a = 1$, $L_x = L_t = 20$, (б) - сечение при $t = L_t/16$.

Отметим, что при таком выборе параметров решение (14) сохраняет до определенного момента времени колебательную структуру, а далее экспоненциально затухает. Количеством колебаний можно варьировать с помощью параметра решения a . Например, при увеличении параметра a в 100 раз в рассматриваемую область попадают только 3 колебания (см. Рис. 3), а при увеличении параметра a в 1000 раз - одно колебание (см. Рис. 4).

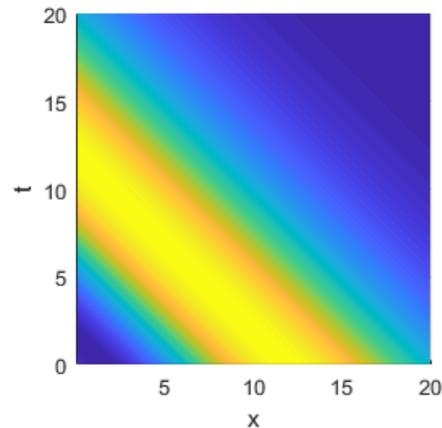


(a)

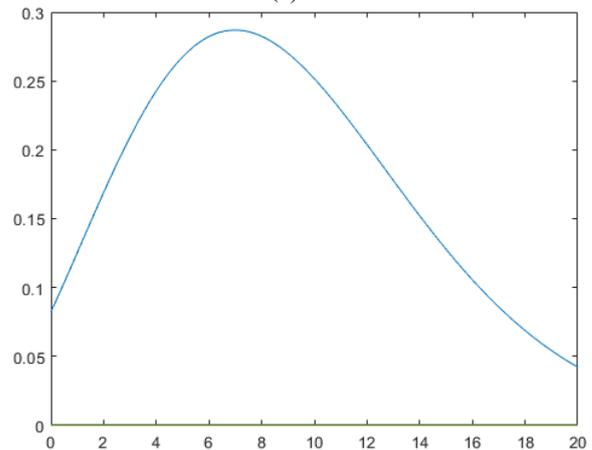


(б)

Рис. 3. (а) - Интенсивность начального распределения комплексной амплитуды (14) для параметров: $\gamma = 10$, $D_2 = 2$, $a = 100$, $L_x = L_t = 20$, (б) - сечение при $t = L_t/16$.



(a)



(б)

Рис. 4. (а) - Интенсивность начального распределения комплексной амплитуды (14) для параметров: $\gamma = 10$, $D_2 = 2$, $a = 1000$, $L_x = L_t = 20$, (б) - сечение при $t = L_t/16$.

При уменьшении параметра γ в 100 раз начальное распределение (14) имеет ненулевую энергию в начальный момент времени и далее экспоненциально затухает вплоть до правой границы рассматриваемой области (см. Рис.5).

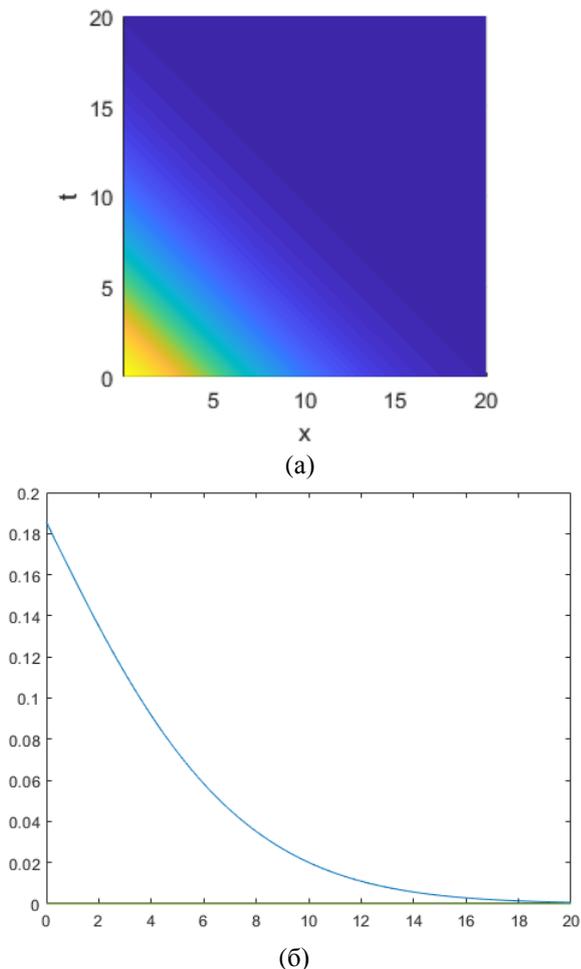


Рис. 5. (а) - Интенсивность начального распределения комплексной амплитуды (14) для параметров: $\gamma = 0.1$, $D_2 = 2$, $a = 1000$, $L_x = L_t = 20$, (б) - сечение при $t = L_t/16$.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена дифференциальная задача, описывающая распространение лазерного фемтосекундного импульса в линейной среде, а также предложен подход, который позволяет получить точное решение обобщенного уравнения Шредингера в виде произведения экспоненциальной функции на специальную функцию Эйри. Полученное решение позволяет контролировать результаты численных экспериментов при математическом моделировании процессов распространения малопериодных фемтосекундных импульсов в линейной среде.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] N. Tzoar, M. Jain, "Self-phase modulation in long-geometry optical waveguides", *Phys. Rev. A*, vol. 23, no. 3, pp. 1266–1270, 1981.
- [2] G. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", Academic, 4th ed., 2007.
- [3] T. Brabec, F. Krausz, "Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, no. 17, pp. 3282–3285, 1997.
- [4] T. Brabec, F. Krausz, "Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 72, no. 2, pp. 545–591, 2000.
- [5] С.В. Степаненко, А.В. Разгулин, В.А. Трофимов, "Об одной модели, описывающей распространение фемтосекундного импульса в среде с керровской нелинейностью", *Прикладная математика и информатика*, № 60, М.: Изд-во МАКСПресс, С. 51–61, 2019.

- [6] M. V. Berry, N. L. Balazs, "Nonspreading wave packets", *Am. J. Phys.* vol. 47, no. 4, pp. 264–267, 1979.
- [7] O. Vallée, M. Soares, "Airy Functions and Applications to Physics", World Scientific, Hackensack NJ, 2004.
- [8] A. Gil, J. Segura, and N. M. Temme, "On Non-Oscillating Integrals for Computing Inhomogeneous Airy Functions", *Math. Comput.*, vol.70, pp. 1183–1194, 2000.
- [9] A. Gil, J. Segura, "On the complex zeros of Airy and Bessel functions and those of their derivatives", *Anal. Appl.*, vol. 12, pp. 537–561, 2014.
- [10] S. Masaki, J. Segata, "Refinement of Strichartz Estimates for Airy Equation in Nondiagonal Case and its Application", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 50, no. 3, pp. 2839–2866, 2017.
- [11] P. Caputa, Sh. Hirano, "Airy Function and 4d Quantum Gravity", *J. High En. Phys.*, 2018.
- [12] A. K. Ghatak, R. L. Gallawa, I. C. Goyal, "Accurate Solutions to Schrödinger's Equation Using Modified Airy Functions", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 28, pp. 400–403, 1992.
- [13] M. Miyagi, S. Nishida, "Pulse spreading in a single-mode fiber due to third-order dispersion", *Appl Opt.*, vol. 18, pp. 678–682, 1979.
- [14] A. Mahalov, S. Suslov, "An "Airy gun": Self-accelerating solutions of the time-dependent Schrödinger equation in vacuum", *Phys. Lett. A*, vol. 377, pp. 33–38, 2012.
- [15] W. Cai, L. Wang, Sh. Wen, "Evolution of airy pulses in the present of third order dispersion", *Optik - Int. J. Light Electron Opt.*, vol. 124, pp. 5833–5836, 2013.
- [16] A. Mahalov, E. Suazo, S. K. Suslov, "Spiral laser beams in inhomogeneous media", *Opt. Lett.*, vol. 38, pp. 2763–2766, 2013.
- [17] Chr. Koutschan, E. Suazo, S. K. Suslov, "Fundamental laser modes in paraxial optics: from computer algebra and simulations to experimental observation", *Appl. Phys. B*, vol. 121, pp. 315–336, 2015.
- [18] R. Li., M. Imran, H. Chen, "Airy plasmons in graphene based waveguides", *IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on Advanced Materials and Processes for RF and THz Applications (IMWS-AMP)*, pp. 1–3, 2016.
- [19] J. A. Borda-Hernández, "Propagation of time-truncated Airy-type pulses in media with quadratic and cubic dispersion", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 32, pp. 1791–1796, 2015.
- [20] K. K. De, H. Kaur, A. Goyal, C. N. Kumar, T. S. Raju, "Airy-Bessel modulated self-similar rogue waves in a nonlinear Schrödinger equation model", *Journal of Modern Optics*, vol. 62, pp. 137–144, 2015.
- [21] N. K. Efremidis, "Spatiotemporal diffraction-free pulsed beams in free-space of the Airy and Bessel type", *Opt. Lett.*, vol. 42, no. 23, pp. 5038–5041 (2017).
- [22] R. Driben, V. V. Konotop, T. Meier, "Coupled Airy breathers", *Opt. Lett.*, vol. 39, pp. 5523–5526, 2014.
- [23] D.V. Karlovets, "Gaussian and Airy wave-packets of massive particles with orbital angular momentum", *Phys. Rev. A* vol. 91, pp. 013847, 2015.
- [24] C. J. Zapata-Rodríguez, M. Naserpour, "Nonparaxial shape-preserving Airy beams with Bessel signature", *Opt. Lett.* vol. 39, pp. 2507–2510, 2014.
- [25] M. Zamboni-Rached, K. Z. Nóbrega, C. A. Dartora, "Analytic description of Airy-type beams when truncated by finite apertures", *Opt. Expr.*, vol. 20, no.18, pp. 19972–19977, 2012.
- [26] A. Banerjee, S. Roy, "Collision-mediated radiation due to Airy-soliton interaction in a nonlinear Kerr medium", *Phys. Rev. A* vol. 98, pp. 033806, 2018.

About one exact solution of linear Schrödinger equation, describing femtosecond pulse propagation

S. V. Stepanenko

Abstract— In current paper, a model of a femtosecond laser pulse propagation in a linear medium is considered. At the study of laser physics problems, described by the Schrödinger equations, a special role is played by the problem of an exact solution existence. The present paper proposes one of the approaches for the construction of exact solution, which consists in the transform of the Schrödinger equation to the Airy equation. An exact solution is developed, using this approach. It should be stressed that even in the case of the propagation of a laser pulse in a linear medium, no exact solutions were found early for the equation under consideration in the paper, and this problem is an urgent one. The exact solution was found for the Schrödinger equation as a product of the exponential function and the Airy functions, and linearly independent solutions of the Airy equation were written, whose properties were used under the analysis of initial laser pulse distributions. Let us note that the obtained solution includes a free parameter that corresponds to a change in the amplitude of the solution oscillations on one of the boundaries of the region considered in the problem. In addition, initial distributions, corresponding to obtained solution and depending on the physical parameters of the problem, are depicted in Figures.

Key words—femtosecond pulses, exact solution, linear Schrödinger equation.

REFERENCES

- [1] N. Tzoar, M. Jain, "Self-phase modulation in long-geometry optical waveguides", *Phys. Rev. A*, vol. 23, no. 3, pp. 1266–1270, 1981.
- [2] G. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", Academic, 4th ed., 2007.
- [3] T. Brabec, F. Krausz, "Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, no. 17, pp. 3282–3285, 1997.
- [4] T. Brabec, F. Krausz, "Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 72, no. 2, pp. 545–591, 2000.
- [5] S.V. Stepanenko, A.V. Razgulin, V.A. Trofimov, "About one model, describing femtosecond pulse distribution in a medium with Kerr nonlinearity", *Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 60, M.: MAKSPress, pp. 51–61, 2019.
- [6] M. V. Berry, N. L. Balazs, "Nonspreading wave packets", *Am. J. Phys.* vol. 47, no. 4, pp. 264–267, 1979.
- [7] O. Vallée, M. Soares, "Airy Functions and Applications to Physics", World Scientific, Hackensack NJ, 2004.
- [8] A. Gil, J. Segura, and N. M. Temme, "On Non-Oscillating Integrals for Computing Inhomogeneous Airy Functions", *Math. Comput.*, vol.70, pp. 1183–1194, 2000.
- [9] A. Gil, J. Segura, "On the complex zeros of Airy and Bessel functions and those of their derivatives", *Anal. Appl.*, vol. 12, pp. 537–561, 2014.
- [10] S. Masaki, J. Segata, "Refinement of Strichartz Estimates for Airy Equation in Nondiagonal Case and its Application", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 50, no. 3, pp. 2839–2866, 2017.
- [11] P. Caputa, Sh. Hirano, "Airy Function and 4d Quantum Gravity", *J. High En. Phys.*, 2018.
- [12] A. K. Ghatak, R. L. Gallawa, I. C. Goyal, "Accurate Solutions to Schrödinger's Equation Using Modified Airy Functions", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 28, pp. 400–403, 1992.
- [13] M. Miyagi, S. Nishida, "Pulse spreading in a single-mode fiber due to third-order dispersion", *Appl Opt.*, vol. 18, pp. 678–682, 1979.
- [14] A. Mahalov, S. Suslov, "An "Airy gun": Self-accelerating solutions of the time-dependent Schrödinger equation in vacuum", *Phys. Lett. A*, vol. 377, pp. 33–38, 2012.
- [15] W. Cai, L. Wang, Sh. Wen, "Evolution of airy pulses in the present of third order dispersion", *Optik - Int. J. Light Electron Opt.*, vol. 124, pp. 5833–5836, 2013.
- [16] A. Mahalov, E. Suazo, S. K. Suslov, "Spiral laser beams in inhomogeneous media", *Opt. Lett.*, vol. 38, pp. 2763–2766, 2013.
- [17] Chr. Koutschan, E. Suazo, S. K. Suslov, "Fundamental laser modes in paraxial optics: from computer algebra and simulations to experimental observation", *Appl.Phys.B*, vol. 121, pp. 315–336, 2015.
- [18] R Li., M. Imran, H. Chen, "Airy plasmons in graphene based waveguides", *IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on Advanced Materials and Processes for RF and THz Applications (IMWS-AMP)*, pp. 1–3, 2016.
- [19] J. A. Borda-Hernández, "Propagation of time-truncated Airy-type pulses in media with quadratic and cubic dispersion", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 32, pp. 1791–1796, 2015.
- [20] K. K. De, H. Kaur, A. Goyal, C. N. Kumar, T. S. Raju, "Airy-Bessel modulated self-similar rogue waves in a nonlinear Schrödinger equation model", *Journal of Modern Optics*, vol. 62, pp. 137–144, 2015.
- [21] N. K. Efremidis, "Spatiotemporal diffraction-free pulsed beams in free-space of the Airy and Bessel type", *Opt.Lett.*, vol. 42, no. 23, pp. 5038–5041 (2017).
- [22] R. Driben, V. V. Konotop, T. Meier, "Coupled Airy breathers", *Opt.Lett.*, vol. 39, pp. 5523–5526, 2014.
- [23] D.V. Karlovets, "Gaussian and Airy wave-packets of massive particles with orbital angular momentum", *Phys.Rev.A* vol. 91, pp. 013847, 2015.
- [24] C. J. Zapata-Rodríguez, M. Naserpour, "Nonparaxial shape-preserving Airy beams with Bessel signature", *Opt. Lett.* vol. 39, pp. 2507–2510, 2014.
- [25] M. Zamboni-Rached, K. Z. Nóbrega, C. A. Dartora, "Analytic description of Airy-type beams when truncated by finite apertures", *Opt. Expr.*, vol. 20, no.18, pp. 19972–19977, 2012.
- [26] A. Banerjee, S. Roy, "Collision-mediated radiation due to Airy-soliton interaction in a nonlinear Kerr medium", *Phys. Rev. A* vol. 98, pp. 033806, 2018.