

Электронный образовательный ресурс для поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний сложных механических систем

А.В. Грезина, А.Г. Панасенко

Аннотация— Современный подход к обучению в высшей школе основывается на формировании у обучающихся целостной системы компетенций: общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных, характеризующих профессиональные качества выпускника. При формировании непосредственно профессиональных компетенций основную роль играет изучение студентами специальных курсов, выполнение лабораторных работ, прохождение практик и написание выпускных квалификационных работ. Для повышения качества и интенсификации преподавания в Нижегородском университете им. Н.И. Лобачевского активно используются электронные образовательные ресурсы. В статье представлена часть электронного образовательного ресурса в виде программного комплекса, предназначенного для поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний сложных механических систем. Программный комплекс написан на языке программирования СИ++ в среде визуального программирования Borland C++Builder. В статье описываются физические подходы и методика поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний механических систем, основанная на понятии геометрической схемы связей и теории чувствительности. Понимание причин самовозбуждения колебаний на стадии выбора идеализации и построения расчетных схем имеют важное значение не только для написания адекватных математических моделей, но и в дальнейшем для определения стратегии создания образцов новой техники на ранней стадии проектирования, обладающих улучшенными динамическими характеристиками. Применение изложенной методики позволяет глубже понять физические процессы, протекающие в автоколебательных системах и принимать обоснованные решения при изучении столь сложных объектов. Алгоритм, реализованный в программном комплексе, является результатом анализа математической модели определенного класса многомерных колебательных систем, которые можно представить в виде некоторого числа взаимосвязанных между собой осцилляторов, включает в себя следующее: формирование матриц масс,

жесткости, диссипации, взаимных и направленных связей математической модели, описывающей самовозбуждение колебаний; построение геометрической схемы связей; расчет собственных частот и форм колебаний, нахождение потенциально неустойчивых форм колебаний; расчет функций чувствительности циклов и отрицательных трений; выделение чувствительных циклов и отрицательных трений с определением их вклада в процентном отношении в работу активных сил, увеличивающих полную энергию системы.

В качестве примера рассматривается задача об исследовании причин самовозбуждения колебаний динамической системы автомобиля ПАЗ.

Ключевые слова— Электронный образовательный ресурс, компетенции, причины самовозбуждения колебаний, геометрическая схема связей, чувствительные циклы, отрицательное трение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Принятие принципов Болонского процесса привело к пересмотру методологических подходов в образовании. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского активно участвует в развитии новых принципов, в частности, он был одним из участников таких масштабных проектов как TUNING RUSSIA [11-14] и META-MATH [1-3,5-6]. Основой нового подхода является формирование у студентов в процессе обучения компетенцией (общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных) необходимых для будущей профессиональной деятельности выпускников [4].

Внедрение новых методологических подходов требует основательного пересмотра также и образовательных программ [1-3]. Опыт, приобретённый при работе в проектах TUNING RUSSIA и META-MATH, позволил Университету разработать собственный образовательный стандарт в области информационно-коммуникационных технологий [7,8].

Реализация современных образовательных программ требует активного применения новых обучающих технологий в особенности, основанных на электронных образовательных средствах [5,9-14], которые в значительной степени дополняют работу преподавателя и стимулируют активность обучающихся. Эффективному использованию традиционных электронных средств обучения во многом могут

Статья получена 30 декабря 2018. Рекомендована организационным комитетом III Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии»

Грезина Александра Викторовна - Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (email:aleksandra-grezina@yandex.ru)

Панасенко Адольф Григорьевич - Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (email: A.G.Panasenko@yandex.ru)

способствовать оболочке гибридных систем интеллектуальной поддержки образовательного процесса, базирующиеся на концепции системы, основанной на знаниях, и нейросетевых технологиях принятия решений [8-12], способные настраиваться на различные предметные области и максимально адаптировать процесс обучения к индивидуальным особенностям обучаемого.

При формировании профессиональных компетенций основной вклад вносит изучение специальных дисциплин, выполнение лабораторных работ, прохождение практик и написание выпускных квалификационных работ, в которых на первый план выступает проблема создания адекватных математических моделей, которые должны строиться на базе глубокого знания причин самовозбуждения колебаний с учетом всего многообразия связей, присущих сложной системе. Понимание причин самовозбуждения колебаний на стадии выбора идеализации и построения расчетных схем имеют важное значение не только для построения адекватных математических моделей, но и в дальнейшем для определения стратегии создания выпускниками (бакалаврами и магистрами) образцов новой техники на ранней стадии проектирования, обладающих улучшенными динамическими характеристиками. Такие задачи возникают при исследовании устойчивости и автоколебаний большинства объектов современного машиностроения [17,20], энергетики [19] и др.

В настоящей статье приводится описание электронного образовательного ресурса в виде программного комплекса, созданного для поддержки спецкурсов, включающих изучение различных аспектов сложных динамических систем, а также для обучающихся, выполняющих практические и выпускные квалификационные работы по соответствующей тематике в институте информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета. Программный комплекс написан на языке программирования СИ++ в среде визуального программирования Borland C++Builder™. Программный комплекс позволяет в интерактивном режиме находить наиболее значимые причины самовозбуждения колебаний путем анализа геометрической схемы связей изучаемой динамической системы. Описываются физические подходы и методика поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний механических систем, основанная на понятии геометрической схемы связей и теории чувствительности [15,18,21-26]. Алгоритм, реализованный в программном комплексе, включает в себя следующее:

- формирование матриц масс, жесткости, диссипации, взаимных и направленных связей математической модели, описывающей самовозбуждение колебаний;
- построение геометрической схемы связей;
- расчет собственных частот и форм колебаний, нахождение потенциально неустойчивых форм колебаний;
- расчет функций чувствительности циклов и отрицательных трений;

- выделение чувствительных циклов и отрицательных трений с определением их вклада в процентном отношении в работу активных сил, увеличивающих полную энергию системы.

В качестве примера рассматривается задача исследования причин самовозбуждения колебаний динамической системы автомобиля ПАЗ.

II. ФИЗИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ ПРИЧИН САМОВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для решения поставленной задачи можно выделить определенный класс многомерных колебательных систем, которые можно представить в виде некоторого числа взаимосвязанных между собой осцилляторов [15]

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Если фиксировать в рассматриваемой системе все координаты, положив их равными нулю кроме i -ой, то она вырождается в систему с одной степенью свободы, описываемую линейным уравнением второго порядка вида

$$m_{ii}\ddot{q}_i + b_{ii}\dot{q}_i + c_{ii}q_i = 0.$$

Такую систему будем рассматривать как парциальный осциллятор, отвечающий обобщенной переменной q_i .

Будем называть коэффициенты m_{ii} , b_{ii} и c_{ii} соответственно его массой и коэффициентами собственного трения и собственной жесткости. Запишем i -е уравнение системы в виде

$$m_{ii}\ddot{q}_i + b_{ii}\dot{q}_i + c_{ii}q_i = - \sum_{j \neq i} (m_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j)$$

Это уравнение будем рассматривать как уравнение движения i -го осциллятора, под действием силы F_i , равной

$$F_i = - \sum_{j \neq i} (m_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j).$$

Эта сила F_i есть суммарное воздействие на i -й осциллятор всех остальных осцилляторов. При этом j -й осциллятор действует на i -й с силой

$$f_{ij} = -m_{ij}\ddot{q}_j - b_{ij}\dot{q}_j - c_{ij}q_j.$$

Аналогично i -й осциллятор действует на j -й с силой

$$f_{ji} = -m_{ji}\ddot{q}_i - b_{ji}\dot{q}_i - c_{ji}q_i.$$

Это взаимодействие двух осцилляторов будем разделять на взаимодействие по координате, скорости и ускорению, и кроме того, на взаимные и направленные согласно таблице 1.

Таблица 1.

Силы взаимодействия (связи)	По координате	Скорости	Ускорению
Взаимные	$c_{ij} = c_{ji}$ упругости	$b_{ij} = b_{ji}$ трения $b_{ij} = -b_{ji}$ гироскопические	$m_{ij} = m_{ji}$ инерционные
Направленные от i -го осциллятора к j -му	$c_{ij} = 0, c_{ji} \neq 0$	$b_{ij} = 0, b_{ji} \neq 0$	$m_{ij} = 0, m_{ji} \neq 0$

Взаимное координатное взаимодействие вместе с собственными силами жесткости имеет потенциальную функцию

$$\frac{1}{2} c_{ii} q_i^2 + c_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} c_{jj} q_j^2.$$

Взаимные и собственные трения могут быть представлены так называемой диссипативной функцией

$$\frac{1}{2} b_{ii} \dot{q}_i^2 + b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} b_{jj} \dot{q}_j^2,$$

а взаимные инерционные взаимодействия вместе с собственными инерционными силами – кинетической энергией

$$\frac{1}{2} m_{ii} \dot{q}_i^2 + m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} m_{jj} \dot{q}_j^2.$$

Пусть взаимодействия между осцилляторами как-то разделены на взаимные и направленные. За коэффициентами взаимных сил сохранены старые обозначения, а коэффициенты направленных сил обозначены $\tilde{m}_{ij}, \tilde{b}_{ij}, \tilde{c}_{ij}$. В соответствии с этим разделением запишем систему уравнений (1.1) в виде

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{q}_j + \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + \tilde{b}_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j + \tilde{c}_{ij} q_j) = 0. \tag{1.2}$$

Умножим уравнения (1.2) на \dot{q}_i и просуммируем их. В результате после простых преобразований можно прийти к соотношению вида

$$\frac{d}{dt} (T + V) = -2F - A - B - C, \tag{1.3}$$

где T, F и V – так называемая кинетическая энергия, диссипативная функция и потенциальная энергия,

$$2T = \sum m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad 2F = \sum b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad 2V = \sum c_{ij} q_i q_j,$$

а A, B и C – функции вида

$$A = \sum \tilde{m}_{ij} \dot{q}_i \ddot{q}_j, \quad B = \sum \tilde{b}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad C = \sum \tilde{c}_{ij} \dot{q}_i q_j.$$

Силы взаимодействия, не меняющие величину $T + V$, назовем консервативными, силы, всегда уменьшающие ее, – диссипативными и силы, могущие ее увеличивать, – активными. Из уравнения изменения энергии (1.3) непосредственно следует:

- а) собственные и взаимные упругости и инерционности, а также гироскопические силы – консервативные;
- б) собственные и взаимные трения, для которых соответствующая часть функции F положительна, – диссипативные, а для которых отрицательна – активные;
- в) все направленные силы – активные.

Разделение взаимодействий на консервативные и неконсервативные с выделением диссипативных взаимодействий и гироскопических содержится уже в Натуральной философии Томсона и Гэта.

Направленные силы и отрицательные трения (трения, для которых соответствующая часть F может быть отрицательной) в силу их активности требуют для своей реализации наличия сторонних источников энергии.

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СХЕМА СВЯЗЕЙ И СТРУКТУРНЫЕ УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Введем в рассмотрение *геометрическую схему связей (ГСС)* [15]. Она представляет собой систему взаимодействующих между собой парциальных осцилляторов, которые обозначаются точками, а действующие между ними направленные и взаимные связи (силы) соответственно направленными и ненаправленными отрезками. Замкнутый контур без самопересечений, составленный из ненаправленных отрезков и по крайней мере одного направленного, проходимого в одном направлении, назовем *циклом*. Теперь сформулируем следующие утверждения [15].

Утверждение 1. Если энергия системы $T+V$ положительно определенная функция $2n$ переменных q_1, q_2, \dots, q_n и $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, то для экспоненциальной неустойчивости необходимо наличие отрицательного трения или цикла.

Утверждение 2. Если кинетическая энергия T является положительно определенной функцией переменных $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, а потенциальная энергия V – знакопеременная функция переменных q_1, q_2, \dots, q_n то для того, чтобы в системе имела место устойчивость, необходимо наличие либо отрицательного трения, либо цикла.

В силу этого основными механизмами возникновения неустойчивости в системах, допускающих осцилляторное представление, являются: а) нарушение так называемой статической устойчивости, когда функция V теряет положительную определенность и становится знакопеременной; б) появление отрицательной диссипации, т.е. возможности подкачки энергии в систему за счет так называемых отрицательных трений; в) наличие замкнутого цикла

воздействий с направленной связью, могущей вкачивать энергию в систему.

IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ. МЕТОДИКА ПОИСКА НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫХ ПРИЧИН САМОВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Формирование теории чувствительности началось в конце 50-х годов прошлого века с работ Г. Боде [21] в связи с бурным развитием теории управления и теории электрических цепей. Дальнейшее развитие теории чувствительности шло по двум направлениям: первое было обусловлено решением задач автоматического регулирования, теории управления и технической кибернетики [21-25], второе – решением задач анализа и синтеза сложных колебательных механических систем [18,25,26].

Под функцией чувствительности понимается частная логарифмическая производная от показателя динамического качества Q_i по одному из параметров системы α_j

$$\Phi(Q_i, \alpha_j) = \frac{\partial \ln Q_i}{\partial \ln \alpha_j} = \frac{\partial Q_i / Q_i}{\partial \alpha_j / \alpha_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.1}$$

где $\bar{\alpha} \subset D_\alpha (\alpha_j^- \leq \alpha_j \leq \alpha_j^+, j = 1, 2, \dots, m)$.

Понятие функции чувствительности может быть использовано для поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний в активных системах. Методика поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний [18] опирается на понятие геометрической схемы связей и цикла [15]. Рассмотрим класс активных линеаризованных динамических систем, описываемых системой дифференциальных уравнений

$$(M + \tilde{M})\ddot{\bar{q}}(t) + (B + \tilde{B})\dot{\bar{q}}(t) + (C + \tilde{C})\bar{q}(t) = 0, \tag{2.2}$$

где $\bar{q}(t)$ – вектор обобщенных координат; M, B, C – симметричные матрицы инерционных, диссипативных и жесткостных параметров; $\tilde{M}, \tilde{B}, \tilde{C}$ – несимметричные матрицы, элементы которых характеризуют направленные связи (силы) по ускорению, скорости и координате.

Предполагается, что системы обладают достаточно малой диссипацией и слабыми направленными связями.

Найдем вначале собственные частоты ω_k и вектор собственных форм колебаний $\bar{V}^{(k)} = [\bar{V}_1^{(k)}, \bar{V}_2^{(k)}, \dots, \bar{V}_n^{(k)}]$, воспользовавшись частью системы (2.2), описывающей колебания консервативной системы.

Учитывая принятые ограничения, сведем систему (2.2) к модальному уравнению с помощью преобразования подобия $\bar{q} = [\bar{V}] \xi$, где $[\bar{V}]$ – матрица, столбцами которой являются векторы собственных форм

колебаний. В результате модальное уравнение примет вид

$$\alpha_k \ddot{\xi}_k(t) + \beta_k \dot{\xi}_k(t) + \gamma_k \xi_k(t) + \tilde{\alpha}_k \ddot{\xi}_k(t) + \tilde{\beta}_k \dot{\xi}_k(t) + \tilde{\gamma}_k \xi_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.3}$$

где

$$\alpha_k = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)},$$

$$\beta_k = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}, \quad \gamma_k = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}$$

$$\tilde{\alpha}_k = \sum_{i,j=1}^n \tilde{m}_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)},$$

$$\tilde{\beta}_k = \sum_{i,j=1}^n \tilde{b}_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}, \quad \tilde{\gamma}_k = \sum_{i,j=1}^n \tilde{c}_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}$$

Для потенциально неустойчивой собственной формы колебаний $\bar{V}^{(k)}$, умножив модальное уравнение на $\dot{\xi}_k$, получим энергетическое соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha_k \dot{\xi}_k^2 + \gamma_k \xi_k^2) = -\beta_k \dot{\xi}_k^2 - \tilde{\alpha}_k \frac{d(\dot{\xi}_k^2)}{dt} - \tilde{\beta}_k \dot{\xi}_k^2 - \tilde{\gamma}_k \frac{d(\xi_k^2)}{dt}, \tag{2.4}$$

которое определяет скорость изменения полной энергии системы $\alpha_k \dot{\xi}_k^2 + \gamma_k \xi_k^2 = T^{(k)} + \Pi^{(k)}$ на k -ой форме колебаний.

Для самовозбуждающихся колебаний $\xi_k(t) = e^{\delta_k t} \sin \omega_k t$, ($\delta_k > 0$) справедливы соотношения

$$2\pi / \omega_k \int_0^{2\pi / \omega_k} d(\dot{\xi}_k^2(t)) dt > 0, \quad 2\pi / \omega_k \int_0^{2\pi / \omega_k} d(\xi_k^2(t)) dt > 0, \quad 2\pi / \omega_k \int_0^{2\pi / \omega_k} \dot{\xi}_k^2(t) dt > 0,$$

поэтому для того, чтобы приращение полной энергии за цикл колебаний было положительным и максимальным, необходимо потребовать, чтобы $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\gamma}_k$ и β_k были отрицательными.

Было показано, что для экспоненциальной неустойчивости многомерной системы необходимо и в некотором смысле достаточно наличия на геометрической схеме связей цикла или отрицательного трения. Вместе с тем следует отметить, что циклы и отрицательные трения не равнозначны между собой. В связи с этим введем понятие чувствительности цикла как меру подкачки энергии в замкнутую динамическую систему при конкретно заданных параметрах. В качестве такой меры можно взять максимальную скорость возрастания полной механической энергии на k -ой форме колебаний

$$W^{(k)} = \sup \frac{d}{dt} (T^{(k)} + \Pi^{(k)}), t \in [0, 2\pi / \omega_k].$$

(2.5)

Для поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний (чувствительных циклов) на каждой собственной частоте выделяются отрицательные параметры $\tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\gamma}_k$ и $\tilde{\beta}_k$. Затем производится ранжирование их модулей по степени убывания. Направленные связи на ГСС назовем *чувствительными связями*, если им соответствуют максимальные по модулю значения $\tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\gamma}_k$ и $\tilde{\beta}_k$, а циклы, содержащие только эти связи, - *чувствительными циклами*. Чувствительными параметрами для отрицательного трения $\beta_k < 0$ будут те, для которых их модули максимальны. Введем понятие функции чувствительности цикла с помощью следующего соотношения:

$$\Phi_{cl}^{(k)}(W^{(k)}, \tilde{m}_{ij}, \tilde{b}_{ij}, \tilde{c}_{ij}) = \frac{\tilde{\alpha}_l^{(k)} + \tilde{\beta}_l^{(k)} + \tilde{\gamma}_l^{(k)}}{Q^{(k)}},$$

(2.6)

где $\tilde{\alpha}_l^{(k)} = \omega_k^3 \sum_{i,j=1}^{n1} \tilde{m}_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}$,

$$\tilde{\beta}_l^{(k)} = \omega_k^2 \sum_{i,j=1}^{n2} \tilde{b}_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)},$$

$$\tilde{\gamma}_l^{(k)} = \omega_k \sum_{i,j=1}^{n3} \tilde{c}_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)} \quad - \quad \text{энергетические}$$

произведения по работе направленных связей по ускорению, скорости и координате l -го цикла, подсчитанная на перемещениях k -ой потенциально неустойчивой формы колебаний, $Q^{(k)}$ - сумма энергетических произведений по работе направленных связей всех циклов, увеличивающих энергию системы. По определению отрицательного трения его работа на потенциально неустойчивой форме колебаний отрицательна, что приводит к увеличению энергии системы. Чувствительность отрицательного трения определяется функцией чувствительности отрицательного трения

$$\Phi_{mp}^{(k)}(W^{(k)}, b_{ij}) = \frac{b_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}}{\sum_{i,j=1}^{n4} b_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}},$$

(2.7)

где $\sum_{i,j=1}^{n4} b_{ij} V_i^{(k)} V_j^{(k)}$ - сумма энергетических

произведений по работе сил отрицательного трения, подсчитанная на перемещениях k -ой потенциально неустойчивой формы колебаний.

Таким образом, на стадии написания математической модели удастся провести анализ чувствительных связей и циклов на ГСС и указать группы параметров,

изменение которых оказывает наибольшее влияние на устойчивость системы.

V. АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

На основе предложенной методики разработаны алгоритм и программный комплекс для поиска наиболее значимых причин самовозбуждения колебаний. Алгоритм включает в себя следующее:

- формирование матриц математической модели, описывающей самовозбуждение колебаний;
- построение геометрической схемы связей;
- расчет собственных частот и форм колебаний, нахождение потенциально неустойчивых форм колебаний;
- расчет функций чувствительности циклов и отрицательных трений;
- выделение чувствительных циклов и отрицательных трений с определением их вклада в процентном отношении в работу активных сил, увеличивающих полную энергию системы.

Программный комплекс написан на языке программирования высокого уровня C++ с использованием среды визуального программирования Borland C++Builder™ для операционной среды Microsoft® Windows.

Интерфейс пользователя представлен в виде различного рода меню, диалоговых панелей и диалоговых окон, а также главного окна приложения.

VI. ИНСТРУКЦИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Входными параметрами являются коэффициенты матриц, определяющие математическую модель, а также коэффициенты матриц, которые определяют геометрическую схему связей. В ходе ввода матриц масс и жесткости программа автоматически контролирует симметричность коэффициентов матриц в соответствии с последним изменением. Симметричность коэффициентов матрицы диссипации проверяется с заданной точностью. Положительную определенность матриц пользователь может проверить, выбрав соответствующий пункт в меню «Проверка». В сеансе работы в главном окне приложения выдаются комментарии и подсказки о требуемых действиях. Главное меню программного комплекса (рис.1) включает в себя следующие режимы:

- «Файл»;
- «Правка»;
- «Проверка»;
- «Вычисления»;
- «Помощь».

В режиме «Файл» пользователю предоставляется возможность:

- создать новую работу;
- открыть ранее сохраненную работу;
- сохранить текущую работу;
- вывести результаты вычислений текущей работы на печать;
- выйти из комплекса.

Режим «Правка» позволяет:

- изменять размерность системы;
- изменять точность численных методов и округления вывода на экран.

Режим «Вычисления» позволяет:

- вычислять собственные частоты и собственные формы колебаний; определять потенциально неустойчивую форму колебаний;
- определять циклы на геометрической схеме связей;
- вычислять чувствительность циклов;
- вычислять работу отрицательных трений.

Подпункт, касающийся чувствительности циклов и отрицательных трений, станет доступным только после вычисления собственных частот и собственных форм колебаний системы. Результаты вычислений выдаются в виде таблиц в главном окне.

Режим «Помощь» позволяет просмотреть файл помощи с описанием программы и краткие сведения о программном комплексе.

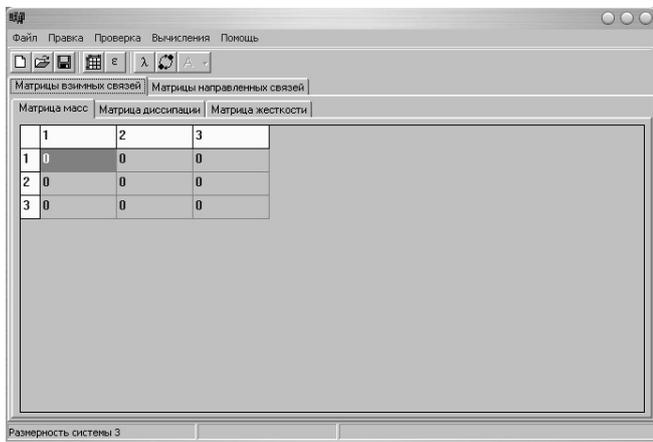


Рис. 1. Главное меню программного комплекса

VII. ПОИСК НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫХ ПРИЧИН САМОВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМОБИЛЯ ПАЗ

Автомобиль ПАЗ является сложной колебательной системой, которая включает в себя кузов, двигатель с трансмиссией, колеса, переднюю и заднюю подвески.

Для построения математической модели [16] в качестве обобщенных координат взяты угловые поперечные перемещения кузова автомобиля, угловые перемещения элементов рулевого управления с колесами передней подвески, угловые перемещения балки с передними колесами относительно оси x (рис. 2). На рисунке обозначены: 1 и 2 базовые размеры кузова с учетом места положения центра масс; N_1, N_2 – сила бокового увода; y и Θ – поперечные и угловые перемещения кузова, φ, ψ – угловые перемещения указанных выше элементов передней подвески. Рулевое управление совершает крутильные колебания вместе с колесами (ψ).

Модель описывает малые колебания кузова и передней подвески при равномерном прямолинейном

движении автомобиля с постоянной скоростью V . Кузов автомобиля считается твердым телом, совершающим вместе с задним мостом плоскопараллельные движения. Передняя подвеска колес является зависимой и может совершать движения по отношению к кузову, лишь в вертикальном направлении. Рулевое управление совершает колебания вместе с колесами. Задний мост совершает движения вместе с кузовом невозмущенное (стационарное) движение автомобиля – это прямолинейное движение вдоль оси x с постоянной скоростью V .

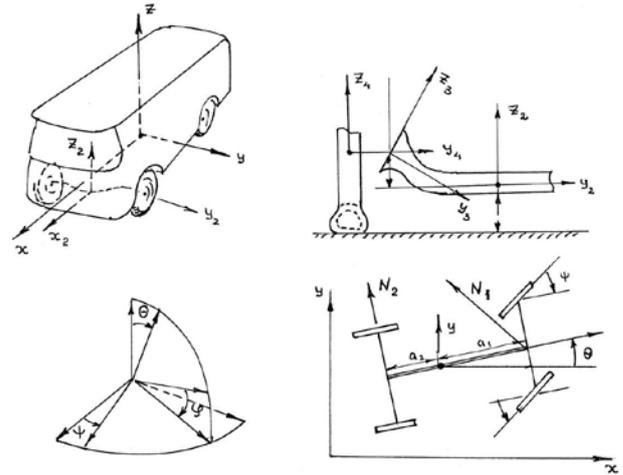


Рис. 2. Расчетная схема модели автомобиля ПАЗ

Колеса автомобиля снабжены деформированными шинами. Система рулевого управления обладает упругостью и демпфированием.

Угловую скорость собственного вращения колес обозначим $\Omega = \frac{V}{r}$, где r – радиус колеса.

В работе [16] записана математическая модель, представляющая собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка:

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\Theta} + \frac{b_3}{V}\dot{\Theta} + c_3\Theta + m_2a_1\ddot{y} - \frac{b_2}{V}\dot{y} + J_3\ddot{\psi} - a_1k_1\psi - \\
 2m_k a_1 z_k \ddot{\varphi} + J_{k3} \frac{V}{r} \dot{\varphi} = 0 \\
 m\ddot{y} + \frac{b_1}{V}\dot{y} + c_4y + m_2a_1\ddot{\Theta} - \frac{b_2}{V}\dot{\Theta} + 2m_k z_k \ddot{\varphi} - k_1\psi = 0, \\
 J_2\ddot{\psi} + h_2\dot{\psi} + c_2\psi + J_3\ddot{\Theta} + 2J_{k3} \frac{V}{r} \cos(\beta)\dot{\varphi} = 0, \\
 J_1\ddot{\varphi} + h_1\dot{\varphi} + c_1\varphi - 2m_k z_k \ddot{y} + \frac{k_1 z_0}{V} \dot{y} - \\
 2m_k a_1 z_k \ddot{\Theta} + \left(\frac{a_1 k_1 z_0}{V} - 2J_{k3} \frac{V}{r}\right)\dot{\Theta} - 2J_{k3} \frac{V}{r} \cos(\beta)\dot{\psi} - k_1 z_0 \psi = 0
 \end{aligned}$$

В таблице 2 представлены параметры математической модели.

Таблица 2.

m_1 – масса балки передней подвески	20 кг
m_k – масса колеса	40 кг
m – масса автомобиля	7420 кг
m_2 – масса переднего моста	180 кг
J_{K3} – главный центральный момент инерции колеса при его вращении вокруг собственной оси	3,2 кг · м ²
J – момент инерции автомобиля относительно вертикальной оси	50000 кг · м ²
$J_1 = J_{K1} + J_{B1} + 2m_k z_k^2 + 2m_k (b+1)^2$	6 кг · м ²
$J_2 = 2(J_{K1} + m_k l^2) \cos^2 \beta + J_{K3} \sin^2 \beta$	6 кг · м ²
$J_3 = 2(J_{K1} + m_2 (b+1)^2 \cos^2 \beta)$	80 кг · м ²
a_1 – расстояние от центра масс автомобиля до передней оси	2 м
a_2 – расстояние от центра масс автомобиля до задней оси	1,6 м
z_k – высота центра колеса над центром тяжести балки	0,1 м
$2b$ – длина балки передней подвески	2 м
r – радиус колеса	0,46 м
Z_0 – высота центра масс балки при стационарном движении автомобиля	0,38 м
β – угол наклона шкворня	0
k_1 – коэффициент сопротивления уводу переднего моста автомобиля	40000 Н/рад
k_2 – коэффициент сопротивления уводу заднего моста автомобиля	40000 Н/рад
$b_1 = k_1 + k_2$	72000 Н/рад
$b_2 = k_2 a_2 + k_1 a_1$	-12000 Нм/рад
c_1 – коэффициент крутильной жесткости при повороте передней подвески вокруг горизонтальной оси, параллельной оси x	400000 Нм/рад
c_2 – коэффициент крутильной жесткости при повороте передних колес вокруг оси шкворня	1400 Нм/рад
c_3 – коэффициент крутильной жесткости кузова относительно оси y	10000000 0 Нм/рад

c_4 – коэффициент жесткости кузова относительно оси z	10000000 Н/м
h_1 – коэффициент рассеивания энергии при повороте балки передней подвески вокруг горизонтальной оси, параллельной оси x	1800 Нмс/рад
h_2 – коэффициент рассеивания энергии при повороте передних колес вокруг оси шкворня	1300 Нмс/рад
V – скорость движения автобуса	20 м/с

Где J_{B1} – главный центральный момент инерции балки относительно горизонтальной оси, параллельной оси x ; J_{B2} – главный центральный момент инерции балки относительно вертикальной оси; J_{K2} – главный центральный момент инерции колеса при его вращении вокруг диаметра; J_B – центральный момент инерции колеса при его вращении вокруг диаметра; Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 3,4 и 5. На рисунке 3 представлены результаты расчета собственных частот и форм колебаний. Также определена потенциально неустойчивая форма колебаний.

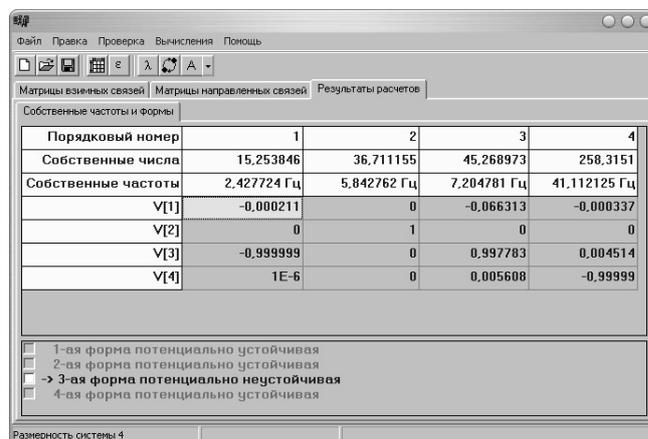


Рис. 3. Результаты расчета собственных частот и форм колебаний

В программном комплексе автоматически формируется геометрическая схема связей по созданным матрицам масс, диссипации, жесткости, взаимных и направленных связей. На рисунках 4 и 5 представлены циклы, на которых осцилляторы Θ , y , ψ и φ обозначены соответственно цифрами 1,2,3 и 4, а направленные и взаимные связи по координате, скорости и ускорению – сплошной, пунктирной и штрихпунктирной линиями со стрелкой и без стрелки соответственно. Циклы неравнозначны между собой. Используя функции чувствительности, найден процентный вклад каждого цикла в суммарную работу всех циклов на потенциально неустойчивой форме колебаний.

№	Работа по 3 форме	%
01	0.000000	00.0000
02	0.000000	00.0000
03	0.000000	00.0000
04	0.000000	00.0000
05	38136.962328	14.1135
06	2.972907	00.0011
07	0.000000	00.0000
08	0.000000	00.0000
09	38136.962328	14.1135
10	2.972907	00.0011

Рис. 4. Результаты исследований

№	Работа по 3 форме	%
29	38157.425192	14.1211
05	38136.962328	14.1135
09	38136.962328	14.1135
20	38136.962328	14.1135
38	38136.962328	14.1135
45	38136.962328	14.1135
46	38136.962328	14.1135
52	615.775111	00.2279
13	612.802205	00.2268
49	612.802205	00.2268

Рис. 5. Результаты исследований

Анализ результатов исследований показал, что наиболее чувствительными (наиболее ответственными за подкачку энергии в систему) являются 7 циклов из 52-х, у которых процентный вклад в суммарную работу направленных связей составляет 14%. Все эти циклы содержат направленную связь по координате, действующую со стороны осциллятора ψ на осциллятор Θ (где ψ – угловое перемещение указанных выше элементов передней подвески, а Θ – угловое перемещение кузова), которая вносит наибольший вклад в суммарную работу системы. С физической точки зрения этот механизм связан с силой увода кузова автобуса при повороте колеса на угол ψ .

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в статье электронный образовательный ресурс в виде программного комплекса предназначен для исследования причин самовозбуждения колебаний сложных механических систем, изучаемых в различных специальных курсах, преподаваемых бакалаврам и магистрам направления подготовки "Прикладная математика и информатика", а также оказывает помощь при прохождении практики и написании выпускных квалификационных работ и магистерских диссертаций. Комплекс позволяет в интерактивном режиме строить геометрическую схему связей и с использованием функций чувствительности находить наиболее значимые причины самовозбуждения колебаний, что помогает студентам глубже понять

физические процессы, протекающие в автоколебательных системах и полученные знания использовать в дальнейшем при построении адекватных упрощенных математических моделей.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia / Zakharova, I., Kuzenkov, O., Soldatenko, I., Yazenin, A., Novikova, S., Medvedeva, S., Chukhnov, A. // Engineering Education on Top of the World: Industry-University Cooperation, SEFI 2016 44th Annual Conference of the European Society for Engineering Education. – 2016. – Tampere, Finland. – P. 15.
- [2] Modernization of math-related courses in engineering education in Russia based on best practices in European and Russian universities / Soldatenko, I., Kuzenkov, O., Zakharova, I., Balandin, D., Biryukov, R., Kuzenkova, G., Yazenin, A., Novikova, S. // Engineering Education on Top of the World: Industry-University Cooperation, SEFI 2016 44th Annual Conference of the European Society for Engineering Education. – 2016. – Tampere, Finland. – P. 16.
- [3] Bedny A., Erushkina L., Kuzenkov O. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology // Tuning Journal for Higher Education. – 2014. – V. 1. – № 2. – P. 387.
- [4] Zakharova I., Kuzenkov O. Experience in implementing the requirements of the educational and professional standards in the field of ICT in Russian education // CEUR Workshop Proceedings Selected Papers of the 11th International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education, SITITO 2016. – 2016. – P. 17-31
- [5] Кузенков О.А., Кузенкова Г.В., Бирюков Р.С. Разработка фонда оценочных средств с использованием пакета MATHBRIDGE. Образовательные технологии и общество. 2016. Т. 19. № 4. С. 465-478.
- [6] Кузенков О.А., Тихомиров В.В. Использование методологии "TUNING" при разработке национальных рамок компетенций в области ИКТ. Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2013. № 9. С. 77-87.
- [7] Гергель В.П., Кузенков О.А. Разработка самостоятельно устанавливаемых образовательных стандартов Нижегородского государственного университета в области информационно-коммуникационных технологий. Школа будущего. 2012. № 4. С. 100-105.
- [8] Kuzenkov O.A., Zakharova I.V. MATHEMATICAL PROGRAMS MODERNIZATION BASED ON RUSSIAN AND INTERNATIONAL STANDARDS // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 233-244.
- [9] Басалин П.Д., Белоусова И.И. Интерактивные формы обучения в образовательном процессе // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – № 3-4. – С. 18-21.
- [10] Басалин П.Д., Кумагина Е.А., Неймарк Е.А., Тимофеев А.Е., Фомина И.А., Чернышова Н.Н. ИТ-образование с применением интеллектуальной обучающей среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Т. 13. – № 4. – С. 105-111. URL: <http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/312/256>
- [11] Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Оболочка гибридной интеллектуальной обучающей среды производственного типа // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society)». – 2018. – V. 21. – № 1. – С. 396-405. – ISSN 1436-4522. URL: http://ifets.ieee.org/russian/depositary/v21_i1/pdf/12.pdf
- [12] Басалин П.Д., Безрук К.В. Архитектура оболочки гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2012. – № 8. – С. 26-34.
- [13] Макаров Е.М. Использование Java для проверки компетенций по геометрическому моделированию // Образовательные технологии и общество. — 2018. — т. 21, № 1. — с. 494–505. — URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32253190>. URL к полному тексту: https://www.jets.net/ETS/russian/depositary/v21_i1/pdf/20.pdf
- [14] Makarov E., Spitters B. The Picard Algorithm for Ordinary Differential Equations in Coq // Interactive Theorem Proving. ITP

2013. Vol. 7998 / ed. by S. Blazy, C. Paulin-Mohring, D. Pichardie. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. — Pp. 463–468. — (Lecture Notes in Computer Science). — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-39634-2_34.
- [15] Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. -М.: Наука, 1978. 336 с.
- [16] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. - М: Наука, 1967, 520 с.
- [17] Igumnov L.A., Metrikin V.S., Grezina A.V., Panasenko A.G. THE EFFECT OF DRY FRICTION FORCES ON THE PROCESS OF DIELECTRIC WAFER GRINDING В сборнике: Vibroengineering Procedia 22, Dynamics of Strongly Nonlinear Systems. Сер. "22nd International Conference on Vibroengineering" 2016. С. 501-505.
- [18] Грезина А.В. Методика построения упрощенных математических моделей с использованием геометрической схемы связей // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 107-114.
- [19] Грезина А.В. Математическое моделирование динамики системы электродержателей дуговых сталеплавильных печей // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2004. Т. 4. № 1 (5). С. 5-10.
- [20] Городецкий Ю.И., Грезина А.В. Исследование устойчивости течения длинных валов с различными технологическими приспособлениями // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1998. № 7-9. С. 126.
- [21] Бодэ Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. Издательство иностр. лит., 1948. 112 с.
- [22] Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. М.: Наука. 1981. 464 с.
- [23] R. Yusupov, E. Rozenwasser. Sensitivity of Automatic Control Systems, CRS Press, Roca Raton, London, New York, Washington, DC, 1999, p. 436.
- [24] Ивановский Р.И. Прикладные аспекты теории чувствительности. Журнал Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. № 6-1. 2011. С. 102-110.
- [25] Eslami, M. Theory of sensitivity in dynam 6-1ic systems. An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1994. 600 pp
- [26] Chan, K.; Tarantola, S.; Saltelli, A.; Sobol', I. M. In Sensitivity Analysis; Chan, K., Scott, M., Eds.; John Wiley & Sons, Chichester, 2000;

On electronic educational resource to search for the most significant causes of self-excitation of oscillation of complex mechanical systems

A.V. Grezina, A.G. Panasenko

Abstract— The modern approach to university education aims at developing an integrated system of competences: cultural, generic professional and professional, which characterize professional qualities of a graduate. In forming specifically professional competences the main role is played by taking special courses, performing laboratory works, doing practical assignments and writing the final qualification paper. In order to improve the quality and raise the teaching standards at the Nizhny Novgorod university named after N.I. Lobachevsky electronic educational resources are actively used. In this article, a part of an electronic educational resource is presented in the form of a program complex intended for finding the most significant reasons of oscillation self-excitation in complex mechanical systems. The program complex is written in C++ programming language using the visual programming environment Borland C++ Builder. The article describes physical approaches and search techniques for the most significant reasons of oscillation self-excitation in mechanical systems based on the concept of the geometrical scheme of connections and the theory of sensitivity. Understanding reasons for self-excitation of vibrations at the stage of the choice of idealization and the creation of computation schemes is important not only for coming up with adequate mathematical models, but also later for determining the strategy for creation at the early design stage of new equipment samples that have improved dynamic characteristics. Application of the described technique allows deeper understanding of the physical processes occurring in self-oscillating systems and helps make justified decisions when studying such complex objects. The algorithm realized in a program complex is the result of the analysis of a mathematical model of a certain class of multidimensional oscillating systems that can be viewed as several interconnected oscillators. It includes the following: forming matrices of masses, rigidity, dissipation, mutual and directed connections of the mathematical model that describes self-excitation of oscillations; creating the geometrical scheme of connections; computing eigenfrequencies and forms of oscillations, finding potentially unstable forms of oscillations; computing sensitivity functions for cycles and negative friction; discovering sensitive cycles and negative friction and determining their share of contribution to work of active forces increasing the total energy of the system.

The problem of investigating reasons for oscillation self-excitation in the dynamic system of the PAZ automobile is considered as an example.

Keywords— Electronic educational resource, competences, reasons of self-excitation of oscillations, geometrical scheme of connections, sensitive cycles, negative friction.

REFERENCES

- [1] Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia / Zakharova, I., Kuzenkov, O., Soldatenko, I., Yazenin, A., Novikova, S., Medvedeva, S., Chukhnov, A. // Engineering Education on Top of the World: Industry-University Cooperation, SEFI 2016 44th Annual Conference of the European Society for Engineering Education. – 2016. – Tampere, Finland. – P. 15.
- [2] Modernization of math-related courses in engineering education in Russia based on best practices in European and Russian universities / Soldatenko, I., Kuzenkov, O., Zakharova, I., Balandin, D., Biryukov, R., Kuzenkova, G., Yazenin, A., Novikova, S. // Engineering Education on Top of the World: Industry-University Cooperation, SEFI 2016 44th Annual Conference of the European Society for Engineering Education. – 2016. – Tampere, Finland. – P. 16.
- [3] Bedny A., Erushkina L., Kuzenkov O. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology // Tuning Journal for Higher Education. – 2014. – V. 1. – № 2. – P. 387.
- [4] Zakharova I., Kuzenkov O. Experience in implementing the requirements of the educational and professional standards in the field of ICT in Russian education // CEUR Workshop Proceedings Selected Papers of the 11th International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education, SITITO 2016. – 2016. – P. 17-31
- [5] Kuzenkov O.A., Kuzenkova G.V., Birjukov R.S. Razrabotka fonda ocenochnyh sredstv s ispol'zovaniem paketa Math-Bridge // Obrazovatel'nye tehnologii i obshchestvo. – 2016. – V. 19. – № 4. – P. 465-478.
- [6] Kuzenkov O.A., Tihomirov V.V. Ispol'zovanie metodologii "Tuning" pri razrabotke nacional'nyh ramok kompetencij v oblasti IKT // Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie. – 2013. – № 9. – P. 77-87.
- [7] Gergel' V.P., Kuzenkov O.A. Razrabotka samostojatel'no ustanavlivaemyh obrazovatel'nyh standartov Nizhegorodskogo gosuniversiteta v oblasti informacionno-kommunikacionnyh tehnologij // Shkola budushhego. – 2012. – № 4. – P. 100-105.
- [8] Kuzenkov O.A., Zakharova I.V. MATHEMATICAL PROGRAMS MODERNIZATION BASED ON RUSSIAN AND INTERNATIONAL STANDARDS // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 233-244.
- [9] Basalin P. D., Belousova I. I. Interactive forms of education in the educational process. Bulletin of Nizhny Novgorod University. N. And. Lobachevsky. - 2014. - №3-4. - P. 18-21.
- [10] Basalin P.D., Kumagina E.A., Nejmark E.A., Timofeev A.E., Fomina I.A., Chernyshova N.N. IT-education using intelligent learning environments // Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie. – 2017. – V. 13. – № 4. – P. 105-111. URL: <http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/312/256>
- [11] Basalin P.D., Timofeev A.E. Obolochka gibridnoj intellektual'noj obuchajushhej sredy produkcionnogo tipa // Educational Technology & Society. – 2018. – V. 21. – № 1. – P. 396-405. – ISSN 1436-4522. URL: http://ifets.ieee.org/russian/depositary/v21_i1/pdf/12.pdf
- [12] Basalin P.D., Bezruk K.V. Hybrid intellectual decision making support system architecture // Nejrokom'jutery: razrabotka, primenenie. – 2012. – № 8. – P. 26-34.

- [13] Makarov E. M. Using Java to test competencies in geometric modeling // Educational technologies and society. - 2018. - vol. 21, № 1. — P. 494-505. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32253190>. URL к полному тексту: https://www.jets.net/ETS/russian/depository/v21_i1/pdf/20.pdf
- [14] Makarov E., Spitters B. The Picard Algorithm for Ordinary Differential Equations in Coq // Interactive Theorem Proving. ITP 2013. Vol. 7998 / ed. by S. Blazy, C. Paulin-Mohring, D. Pichardie. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. — Pp. 463–468. — (Lecture Notes in ComputerScience). — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-39634-2_34.
- [15] Neimark Y. I., Dynamic systems and controllable processes. - Moscow: Science, 1978. 336 p.
- [16] Neymark Yu. I., Fufaev N. Ah. Dynamics of nonholonomic systems. - M: Science, 1967, 520 p.
- [17] Igumnov L.A., Metrikin V.S., Grezina A.V., Panasenko A.G. THE EFFECT OF DRY FRICTION FORCES ON THE PROCESS OF DIELECTRIC WAFER GRINDING. // Proceedings of the: Vibroengineering Procedia 22, Dynamics of Strongly Nonlinear Systems.Ser. "22nd International Conference on Vibroengineering" 2016. C. 501-505.
- [18] Grezina A.V. A technique for constructing simplified mathematical models using the geometric scheme of connections. // Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta im. N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical modeling and optimal control. 2003. № 1. P. 107-114.
- [19] Grezina A.V. Mathematical modeling of the dynamics of the system of electrode holders of arc steel-smelting furnaces // Bulletin of the Saratov State Technical University. 2004. T. 4. No. 1 (5). Pp. 5-10.
- [20] Gorodetsky Yu.I., Grezina A.V. Investigation of the stability of the turning of long shafts with various technological adaptations // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mechanical engineering. 1998. № 7-9. 126.
- [21] Bode G. The theory of circuits and the design of amplifiers with feedback. Publishing house inostr. lit., 1948. 112 p.
- [22] Rosenwasser E. N., Yusupov RM Sensitivity of automatic control systems. M.: Science. 1981. 464 p.
- [23] Ivanovsky R. I. Applied aspects of the theory of sensitivity. The journal Nauchno-tehnicheskie Vedomosti SPbGPU. Informatics. Telecommunications. Management. No. 6-1. 2011. P. 102-110.
- [24] Gorodetsky V.I., Zakharin F.M., Rozenwasser E. N., Yusupov RM Methods of the theory of sensitivity in automatic control. L: Energy. 1971. 345 p.
- [25] Eslami, M. Theory of sensitivity in dynamic systems. An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1994. 600 pp
- [26] Chan, K.; Tarantola, S.; Saltelli, A.; Sobol', I. M. In Sensitivity Analysis; Chan, K., Scott, M., Eds.; John Wiley & Sons, Chichester, 2000; p 167