Обзор методов расчета опционов на базовые активы, цена которых описывается моделями ARIMA-GARCH

А. Р. Данилишин

***Аннотация*—В статье проведён обзор методов оценки производных финансовых инструментов, когда динамика цен базовых активов описывается моделями ARIMA-GARCH. Традиционные модели геометрического броуновского движения не учитывают такие эмпирические свойства временных рядов, как кластеризация волатильности, условная гетероскедастичность и тяжёлые хвосты распределений. Рассматриваются гибридные спецификации ARIMA-GARCH, учитывающие как временную зависимость, так и изменчивость волатильности, и обсуждаются их следствия для неполноты рынка и выбора эквивалентной мартингальной меры. Особое внимание уделено расширениям принципа Гирсанова и методам построения замены меры в неполных рынках, включая модификации для распределений с тяжелыми хвостами. Обзор объединяет аналитические результаты и численные алгоритмы ценообразования опционов при ARIMA-GARCH динамике, оценивает устойчивость преобразований меры, влияние предположений о распределении ошибок и чувствительность численных схем. Приведены численные примеры ценообразования, сравнительный анализ подходов и практические рекомендации по выбору методик и параметризации. В заключении обозначены основные компромиссы методов, ограничения существующих подходов и перспективы дальнейших исследований в области робастной оценки деривативов при негауссовских и гетероскедастичных процессах. Дополнительно обсуждаются численная устойчивость методов, оценка риска и рекомендации по практической реализации.**

***Ключевые слова*—ARIMA-GARCH, опционы, риск-нейтральная мера, тяжёлые хвосты, принцип Гирсанова, неполный рынок.**

I. Введение

В современной финансовой теории и практике особое внимание уделяется моделированию динамики цен базовых активов и последующему анализу производных финансовых инструментов, таких как опционы. Традиционные модели, основанные на предположении геометрического броуновского движения, обладают ограниченной способностью описывать эмпирически наблюдаемые свойства временных рядов финансовых данных — такие как автокорреляция, условная гетероскедастичность, кластеризация волатильности и тяжелохвостость распределений доходности.

Для более адекватного описания динамики цен на финансовые активы широко применяются гибридные модели, сочетающие в себе элементы авторегрессии (ARIMA) и условной гетероскедастичности (GARCH). Эти модели позволяют учитывать как тренды и сезонность, так и нестационарность волатильности, что делает их особенно полезными при анализе реальных рыночных данных. Однако использование ARIMA-GARCH-моделей влечет за собой важные теоретические следствия: в частности, рынок, описываемый такими процессами, является неполным, что затрудняет или делает неоднозначным определение эквивалентной безарбитражной меры.

В связи с этим особую актуальность приобретают подходы к оценке деривативов в условиях неполных рынков. Одним из ключевых методов, применяемых в такой ситуации, является расширенный принцип Гирсанова, позволяющий переходить к эквивалентной мере посредством анализа изменения вероятностной структуры базового процесса. Этот подход получил широкое развитие в работах по математической экономике и финансовой математике, в том числе в контексте моделей с нестабильной волатильностью и стохастическими параметрами.

Настоящая статья посвящена систематическому обзору современных исследований, связанных с оценкой стоимости деривативов на активы, динамика цен которых описывается ARIMA-GARCHмоделями. Особое внимание будет уделено применению расширенного принципа Гирсанова, его модификациям для учета тяжелохвостых распределений, а также аналитическим и численным результатам, полученным автором и другими исследователями в этой области. В заключительной части приведены примеры расчетов опционных цен и обсуждение практических аспектов использования соответствующих моделей. Статья имеет следующую структуру:

В разделе 2 рассматриваются модели ARIMA-GARCH, сочетающие авторегрессионные свойства и условную гетероскедастичность. Показано, как эти модели применяются для описания временных рядов доходностей финансовых активов. Подчеркивается, что такие модели приводят к неполноте рынка, что требует разработки специальных методов оценки деривативов.

Раздел 3 посвящен современным методам оценки производных финансовых инструментов в условиях неполных рынков. Рассматривается расширенный

Статья получена 7 июля 2025.
Данилишин А. Р., МГУ им. М.В. Ломоносова, (email: danilishin-artem@mail.ru).

принцип Гирсанова, позволяющий переходить к эквивалентной мере, при которой цена актива становится локальным мартингалом. Обсуждаются условия существования и выбор подходящей меры.

В разделе 4 представлен обзор современных исследований, в которых применяются модели ARIMA-GARCH для описания динамики базовых активов, а также используется расширенный принцип Гирсанова для оценки производных финансовых инструментов. Особое внимание уделяется численным методам и критериям выбора оптимальной меры.

Раздел 5 рассматривает ситуацию, когда распределение доходностей имеет тяжёлые хвосты, что затрудняет применение стандартного расширенного принципа Гирсанова. Приводятся подходы к модификации метода, обеспечивающие устойчивость оценки при наличии экстремальных наблюдений, а также обсуждаются альтернативные способы выбора меры.

В заключительном разделе 6 представлены результаты численного моделирования и оценки стоимости опционов, полученные с использованием разработанных методов. Проводится сравнение различных методов и обсуждается практическая значимость полученных результатов.

II. Модели ARIMA-GARCH. Их использование в финансах. Неполнота рынка

Модели ARIMA-GARCH (Autoregressive Integrated Moving Average — Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) являются одними из наиболее распространённых инструментов моделирования временных рядов в эконометрике и финансовой математике. Они позволяют одновременно учитывать автокорреляционные зависимости в данных (модель ARIMA) и стохастическую изменчивость (волатильность), зависящую от времени (модель GARCH).

Модель ARIMA. ARIMA-модели (Box и Jenkins, 1970 [1]) предназначены для описания временных рядов с нестационарным поведением. Они включают в себя авторегрессионную часть (AR), интегрирующую часть (I) — то есть порядок дифференцирования, и скользящее среднее (MA). Модель ARIMA (p,d,q) описывается уравнением:

$$\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \qquad (1)$$

где B — оператор сдвига, d — порядок интегрирования, $\Phi(B)$ и $\Theta(B)$ — полиномы, задающие AR и MA части соответственно.

Модель GARCH. Для моделирования условной изменчивости используется семейство моделей GARCH, предложенное Энглем и Боллерслевом (Engle и Robert, 1982 [2]; Bollerslev и Tim, 1986 [3]).

Основная модель GARCH(p,q) имеет вид:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \ \ z_t \sim iid(0,1), \ \ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \qquad (2)$$

где σ_t^2 — условная дисперсия в момент времени t.

Комбинированная модель ARIMA-GARCH. Для финансовых временных рядов, таких как доходности акций, курсы валют и другие, характерны как автокорреляция, так и изменчивость волатильности. Поэтому естественным шагом является объединение моделей ARIMA и GARCH в единую структуру, позволяющую точно описывать поведение временных рядов в реальных условиях рынка. Такие модели получили широкое распространение в финансовом прогнозировании, управлении рисками и оценке производных инструментов (Tsay и Ruey, 2005 [4], Alexander и Carol, 2008 [5]).

Использование в финансах. Модели ARIMA-GARCH применяются для:

- моделирования доходностей активов;
- оценки волатильности и управления рисками;
- прогнозирования стоимости деривативов;
- выявления режимов нестабильности на финансовых рынках.

Их широкое использование обусловлено способностью учитывать как временные зависимости, так и волатильность, которая меняется во времени.

Неполнота рынка. При использовании ARIMA-GARCH моделей возникает фундаментальная проблема: рынок становится неполным. Это связано с тем, что доходности базового актива не описываются марковскими процессами с независимыми приращениями, а зависят от всей истории, в том числе через условную дисперсию. Следствием неполноты является отсутствие единственной эквивалентной безарбитражной меры, что требует более сложных методов для оценки стоимости деривативов.

Таким образом, модели ARIMA-GARCH, несмотря на свою эффективность в описании финансовых временных рядов, требуют специальных подходов при применении в задачах ценообразования производных инструментов, что и является предметом последующих разделов статьи.

III. Подходы к оценке деривативов в неполных рынках. Расширенный принцип Гирсанова

В классической теории ценообразования финансовых деривативов (см. работы Black-Scholes [6], Harrison-Kreps [7], Delbaen-Schachermayer [8]) основным инструментом является переход к эквивалентной мере, при которой дисконтированный процесс цены актива становится мартингалом. Этот переход осуществляется с использованием теоремы Гирсанова, которая формализует изменение меры вероятности с помощью экспоненциального мартингала.

Однако в условиях неполного рынка — например, при наличии стохастической волатильности или зависимости текущей дисперсии от прошлых значений доходностей (как в моделях GARCH) — не существует единственной эквивалентной безарбитражной меры. Это требует применения обобщённых методов оценки.

Теорема Гирсанова. В классической форме теорема

Гирсанова утверждает, что при выполнении определенных условий можно перейти от меры $\mathbb{P}$ к мере $\mathbb{Q}$, под которой винеровский процесс изменяет свой дрейф:

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t^{\mathbb{P}} + \theta_t dt, \tag{3}$$

где θ_t процесс рыночной цены риска, удовлетворяющий условиям Новикова [9] или Казамы [10].

Неполные рынки. В неполных рынках, где базовый актив описывается моделями GARCH, стандартный принцип Гирсанова неприменим напрямую, так как структура зависимости во времени сложнее, а источников неопределённости может быть больше, чем торгуемых активов. Для таких рынков были разработаны расширенные версии принципа Гирсанова, позволяющие вводить целые семейства эквивалентных мартингальных мер. Каждая из них может интерпретироваться как соответствующая разным предположениям о предпочтениях инвесторов или критериях хеджирования.

Расширенный принцип Гирсанова. Одним из таких подходов является введение дополнительного параметрического множества вероятностных мер $\{\mathbb{Q}^\theta\}$, где каждая мера определяется через стохастический процесс θ_t и экспоненциальный мартингал:

$$\frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right). \tag{4}$$

Далее, выбирается мера $\mathbb{Q}^\theta$ из класса возможных, исходя из дополнительных условий: минимизация ошибки хеджирования, критерий минимального риска (minimal entropy martingale measure), минимизация L^2 - расстояния до $\mathbb{P}$ и др. (Fo¨llmer-Schweizer et al., 1991 [11], Cochrane и John, 2005 [12], Pham и Huyen, 2009 [13]).

Оценка деривативов. При выбранной мере $\mathbb{Q}^\theta$ справедливая цена европейского опциона с выплатой $H=h(S_T)$ в момент времени t равна:

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\theta}\left[e^{-r(T-t)}H|\mathcal{F}_t\right] \tag{5}$$

В задачах, где S_t описывается моделью ARIMA-GARCH, расчёт этой величины требует либо численного моделирования траекторий, либо приближённых аналитических подходов.

Таким образом, использование расширенного принципа Гирсанова предоставляет математический аппарат, позволяющий адекватно оценивать стоимость деривативов даже в условиях сложной динамики базового актива и отсутствия полной возможности хеджирования.

IV. Обзор работ по оценке деривативов на базовые активы, описываемые моделями ARIMA-GARCH, с использованием расширенного принципа Гирсанова

Использование моделей ARIMA-GARCH для описания динамики цен базовых активов обусловлено их способностью учитывать как автокорреляционную структуру (через ARIMA-компоненту), так и условную гетероскедастичность (через GARCH-компоненту). Однако эти модели не являются марковскими и не допускают применения классического принципа Гирсанова напрямую. Поэтому возникает необходимость модифицировать метод изменения меры, адаптируя его под такие стохастические структуры.

Ранняя работа: Duan (1995). Одним из первых значимых подходов к оценке опционов в GARCHсреде является локально риск-нейтральный подход, предложенный Дуаном (Duan и Jin-Chuan, 1995 [14]). Он показал, что можно сконструировать риск-нейтральную меру, при которой GARCHдисперсия сохраняет свою структуру, а сдвиг в дрейфе обеспечивает корректную переоценку:

$$\tilde{r}_t = r - \frac{1}{2}h_t + \frac{1}{2}\lambda h_t, \tag{6}$$

где λ — параметр, описывающий премию за риск.

Работы Heston-Nandi (2000). Модель GARCH с экспоненциальной дискретизацией и аналитическим решением была предложена в работе Heston et al., 2000 [15]. Под экспоненциальной дискретизацией здесь понимается способ приближения непрерывных стохастических процессов во временных рядах, при котором используется экспоненциальное затухание значений — это позволяет получить численно устойчивое и аналитически удобное описание динамики волатильности. Их подход позволил получить формулу для цены европейского опциона в условиях GARCH(1,1)-динамики при определённой форме изменения меры. В этой модели применяется специальный вид параметризации, при котором переоценка осуществляется через изменение дрейфа логарифмической доходности:

$$log\frac{S_{t+1}}{S_t} = r - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}\epsilon_{t+1}. \tag{7}$$

ARIMA-GARCH и обобщённый принцип Гирсанова. Современные исследования, например, Takaishi, 2007 [16], Christoffersen et al., 2007 [17], Degiannakis et al., 2019 [18] рассматривают более общие случаи, когда доходность описывается ARIMA-GARCH моделями, то есть с наличием тренда, сезонности и стохастической волатильности одновременно. В этих работах применяется расширенный принцип Гирсанова, позволяющий адаптировать риск-нейтральную меру к нелинейным и нестационарным структурам.

Наиболее распространённый метод — это введение корректирующего фактора в дрейф AR части:

$$X_t = \mu_t + \sum_{i=1}^{p}\phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q}\theta_j\epsilon_{t-j} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, h_t), \tag{8}$$

где h_t — дисперсия, описываемая GARCH. Под риск-нейтральной мерой меняется не только дрейф μ_t, но и структура инноваций ϵ_t через экспоненциальное изменение меры.

Модели с тяжелыми хвостами. Некоторые авторы, включая Rachev et al., 2005 [19], обратили внимание на недостаточность нормального распределения в моделях ARIMA-GARCH и предложили использовать t-распределение или обобщённые гиперболические распределения. В этих случаях переход к риск-нейтральной мере требует дополнительной коррекции через параметры хвостов распределения, что влияет на цену опциона.

Заключение. Таким образом, текущая литература демонстрирует, что:

• Модели ARIMA-GARCH адекватно отражают реальную динамику активов, включая эффект кластеризации волатильности и автокорреляции.

• Для корректного ценообразования опционов необходимо применение расширенных версий принципа Гирсанова, так как классическая теорема не применима в силу неполноты рынка.

• Конкретные реализации риск-нейтральной меры зависят от структуры модели и зачастую требуют численных методов (метод Монте-Карло, подходы на основе моментов, Fourier-интегралы).

V. Случай тяжелохвостых распределений. Модификация расширенного принципа Гирсанова

Классическая формулировка расширенного принципа Гирсанова предполагает наличие производящей функции моментов распределения моделируемого актива. Однако на практике многие финансовые временные ряды демонстрируют тяжелохвостость, асимметрию и склонность к выбросам, что делает стандартный подход недостаточно точным, либо невозможным в имплементации.

В работе [20] была предложена модификация расширенного принципа Гирсанова, адаптированная для случая логарифмической доходности. В качестве примера распределения логарифмической доходности рассматривался закон Джонсона типа SU, относящийся к классу асимметричных и тяжёлых на концах распределений. Предложенный подход учитывает эмпирические особенности реальных финансовых временных рядов и позволяет более точно аппроксимировать рискнейтральную меру в условиях отклонения от нормальности.

Ключевым элементом предложенной модификации является приближённое преобразование плотности вероятности через логарифмическую аппроксимацию с сохранением важнейших статистических характеристик базового распределения. Это позволяет обеспечить корректность модели в условиях неполноты рынка — то есть при отсутствии полной информации о вероятностной структуре динамики активов. Кроме того, данный подход обеспечивает численно устойчивую и интерпретируемую конструкцию риск-нейтральной меры.

Методика была протестирована на ряде реальных данных, где показала стабильность и точность при оценке справедливых цен европейских опционов. Также она может быть эффективно интегрирована в существующие модели ARIMA-GARCH с нестандартными ошибками, как показано в других работах автора [21], [22]. В работе [23] предложенное преобразование было обобщено на многомерный случай, что позволяет учитывать зависимости между несколькими базовыми активами при построении риск-нейтральной меры.

Таким образом, предложенная модификация расширенного принципа Гирсанова обеспечивает необходимый теоретический и прикладной инструментарий для анализа производных финансовых инструментов в условиях тяжелохвостых распределений и рыночной неполноты.

VI. Результаты расчета опционов

В качестве эмпирических данных были выбраны опционы на фордовый индекс Германии DAX с различными сроками погашения. Все расчёты проводились по состоянию на 3 июня 2019 года.

Оценка справедливой стоимости европейских опционов CALL и PUT осуществлялась методом Монте-Карло на основе модели ARIMA-GARCH, построенной для логарифмической доходности базового актива. Использовались стандартные функции выплат:

$$b_c(S_T, X) = \max(S_T - X, 0), \quad b_p(S_T, X) = \max(X - S_T, 0), \tag{9}$$

где S_T — цена актива на момент экспирации T, а X — цена исполнения. Стоимость опциона определялась как математическое ожидание функции выплаты относительно риск-нейтральной меры $\mathbb{Q}$, дисконтированное к текущему моменту времени:

$$CALL/PUT = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\right]}{(1+r)^T} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]}{(1+r)^T} \tag{10}$$

где $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ — производная Радона–Никодима, соответствующая риск-нейтральной мере, построенной на основе модифицированного принципа Гирсанова.

Для численной реализации использовалось M=100000 траекторий для ближайших дат экспирации и M=10000 — для более удалённых. Оценка точности модели проводилась с использованием абсолютной ошибки (AE), определяемой как:

$$AE(Moneyness) = \left|\hat{C}(X) - C_{mkt}(X)\right|, \tag{11}$$

где $\hat{C}(X)$ — модельная цена опциона, $C_{mkt}(X)$ — рыночная котировка, X/S_0 — показатель денежности опциона (Moneyness).

На рисунках 1–4 представлены результаты для опционов на индекс DAX с двумя сроками экспирации. Анализ показывает, что модель с ошибками, распределёнными по закону Джонсона SU, даёт более точные оценки справедливых цен по сравнению с другими подходами, особенно в случае длинных горизонтов (экспирация в 2023 году).

Результаты данного раздела опубликованы в работе [21].

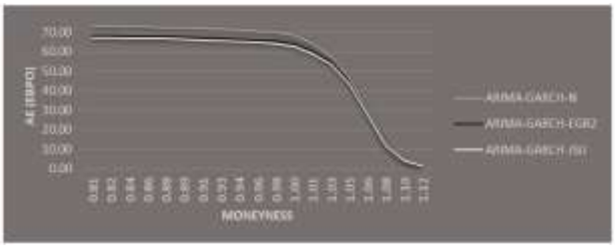

Рис. 1: Абсолютные ошибки цен опционов CALL на индекс DAX (экспирация: 22 июня 2019)

Рис. 2: Абсолютные ошибки цен опционов PUT на индекс DAX (экспирация: 22 июня 2019)

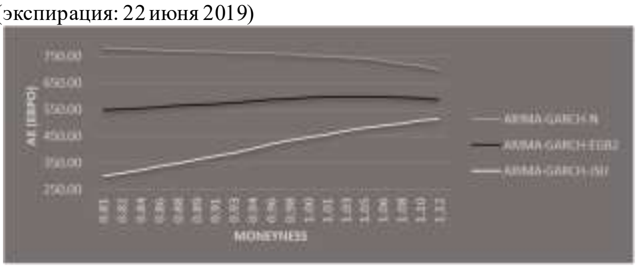

Рис. 3: Абсолютные ошибки цен опционов CALL на индекс DAX (экспирация: 22 декабря 2023)

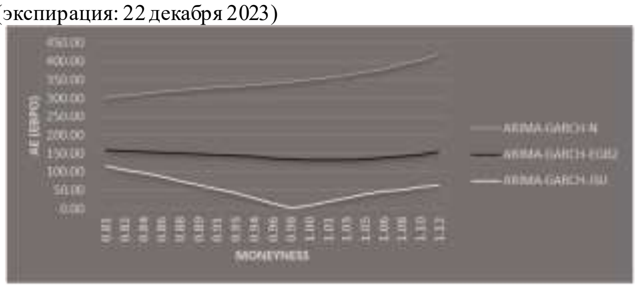

Рис. 4: Абсолютные ошибки цен опционов PUT на индекс DAX (экспирация: 22 декабря 2023)

В дополнение к расчету справедливых цен опционов была проведена оценка однодневного Value at Risk (VaR) портфеля, состоящего из пяти опционных контрактов на различные базовые активы (табл. 1). Оценка VaR выполнялась как относительно физической вероятностной меры, так и в рискнейтральной мере, с использованием модели ARIMA-GARCH и распределения ошибок по закону Джонсона SU.

Базовый актив	Цена исполнения	Дата исполнения	Валюта	Тип контракта
Индекс DAX	10750	19.06.2020	EUR	CALL
Индекс SMIM	2340	19.06.2020	CHF	PUT
GBP/USD	128	06.05.2020	USD	PUT
Natural Gas	2.25	25.06.2020	USD	CALL
Light Sweet Crude Oil	70	16.11.2022	USD	CALL

Табл. 1: Набор опционных контрактов для оценки однодневного VaR

Для снижения размерности использовался метод главных компонент, в рамках которого первые три компоненты объясняют 82,8% дисперсии цен базовых активов. Однодневный VaR портфеля оценивался методом Монте-Карло с генерацией траекторий главных компонент на основе ARIMAGARCH моделей и последующим переходом к риск-нейтральной динамике.

Для тестирования качества моделей VaR применялся тест Купика, сравнивающий частоту превышений VaR с заданным уровнем значимости. Бэк-тестирование было выполнено на исторических данных за период с 19 августа 2019 года по 23 марта 2020 года (150 рабочих дней) при уровнях значимости 95% и 99%.

VaR уровень	Модель	Кол-во превышений	Статистика	P-Value
95%	Риск-нейтральная мера	7	0,0359	0,8498
	Физическая мера	8	0,0344	0,8529
99%	Риск-нейтральная мера	2	0,1524	0,6962
	Физическая мера	4	2,8890	0,0892

Табл. 2: Результаты теста Купика для однодневного VaR портфеля

Результаты (табл. 2) показывают, что обе модели успешно проходят тест Купика при уровне 95%, демонстрируя сопоставимую точность. При уровне 99% преимущество наблюдается у модели, построенной на риск-нейтральной мере, что подтверждает её большую эффективность в оценке рисков при экстремальных значениях.

VII. Заключение

В данной статье был проведён обзор современных методов оценки деривативов в условиях, когда динамика базового актива моделируется с помощью моделей ARIMA-GARCH. Были рассмотрены особенности таких моделей, их применение в финансовой практике, а также ограничения, связанные с неполнотой рынка. Особое внимание было уделено расширенному принципу Гирсанова, который лежит в основе перехода к риск-нейтральной мере в условиях отсутствия полного арбитража.

На основе проведённого анализа показано, что классические методы не всегда подходят для описания эмпирически наблюдаемых распределений доходностей, особенно в случае наличия тяжелых хвостов. В связи с этим была рассмотрена модификация расширенного принципа Гирсанова, предложенная автором, которая учитывает специфику распределения типа SU Джонсона и позволяет более корректно аппроксимировать динамику цен активов в риск-нейтральной мере.

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение: они открывают возможности для более точного и устойчивого моделирования опционных контрактов на основе реалистичных стохастических моделей, применимых к реальным финансовым данным.

Библиография

[1] George E. P. Box and Gwilym M. Jenkins. Time Series Analysis: Forecasting and Control. HoldenDay, 1970.

[2] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of uk inflation. Econometrica, т. 50, № 4, с. 987–1007, 1982.

[3] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, т. 31, № 3, с. 307–327, 1986.

[4] Ruey S. Tsay. Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, 2005.

[5] Carol Alexander. Market Risk Analysis, Volume II: Practical Financial Econometrics. John Wiley & Sons, 2008.

[6] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, т. 81, № 3, с. 637–654, 1973.

[7] J. Michael Harrison and David M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. Journal of Economic Theory, т. 20, № 3, с. 381–408, 1979.
[8] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. The Mathematics of Arbitrage. Springer, 2006.
[9] A. A. Novikov. On an identity for stochastic integrals. Theory of Probability & Its Applications, т. 17, № 4, с. 717–720, 1972.
[10] Norihiko Kazamaki. Continuous exponential martingales and bmo. Lecture Notes in Mathematics, 1579, 1994.
[11] Hans Fo¨llmer and Martin Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. Applied Stochastic Analysis, с. 389–414, 1991.
[12] John H. Cochrane. Asset Pricing. Princeton University Press, 2005.
[13] Huyen Pham. Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications. Springer, 2009.
[14] Jin-Chuan Duan. The garch option pricing model. Mathematical Finance, т. 5, № 1, с. 13–32, 1995.
[15] Steven L. Heston and Saikat Nandi. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies, т. 13, № 3, с. 585–625, 2000.
[16] Tetsuya Takaishi. Bayesian estimation of garch model by hybrid monte carlo. arXiv preprint physics/0702240, 2007.
[17] Peter Christoffersen, Kris Jacobs, and Karim Mimouni. Volatility dynamics for the s&p500: Evidence from realized volatility, daily returns and option prices, EFA 2007 Ljubljana Meetings Paper, url: https://ssrn.com/abstract=926373
[18] Stavros Degiannakis, George Filis, Tony Klein, and Thomas Walther. Forecasting realized volatility of agricultural commodities. International Journal of Forecasting, т. 38, № 1, с 74–96, 2019.
[19] Svetlozar T. Rachev, Stefan Mittnik, Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, and Teo Jasic. Fat-tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing. John Wiley & Sons, 2005
[20] А. Р. Данилишин. Приближение Гирсановской меры с логарифмической доходностью в случае тяжелохвостных распределений. Труды Института системного анализа Российской академии наук, т. 73, № 3, с 21–30, 2023.
[21] А.Р. Данилишин, Д.Ю. Голембиовский. Оценка стоимости опционов на основе моделей arima-garch с ошибками, распределенными по закону su Джонсона. Информатика и ее применения, т. 14, № 4, с. 83–90, 2020.
[22] А.Р. Данилишин, Д.Ю. Голембиовский. Риск-нейтральная динамика для модели arimagarch с ошибками, распределенными по закону su Джонсона. Информатика и ее применения, т. 14, № 1, с. 48–55, 2020.
[23] А.Р. Данилишин. Риск-нейтральная динамика портфеля базовых активов при использовании метода главных компонент. Труды Института системного анализа Российской академии наук, т. 70, № 3, с. 13–23, 2020.

A Review of Option Pricing Methods for Underlying Assets Modeled by ARIMA-GARCH Processes

A. R. Danilishin

***Abstract*—This paper surveys methods for valuing derivative financial instruments when underlying asset prices follow ARIMA-GARCH dynamics. Unlike geometric Brownian motion, these models capture volatility clustering, conditional heteroskedasticity, and heavy-tailed distributions. Hybrid ARIMA-GARCH specifications are examined, combining temporal dependence with time-varying volatility, and their implications for market incompleteness and the selection of an equivalent martingale measure are discussed. Extensions of Girsanov's theorem and approaches for constructing measure changes in incomplete markets, including modifications for heavy-tailed distributions, receive particular attention. The review integrates analytical results with numerical option pricing algorithms under ARIMA-GARCH dynamics, assessing robustness of measure transformations, the influence of distributional assumptions, and sensitivity of schemes. Comparative analyses of option pricing methods, numerical examples, and practical recommendations for model choice and parameterization are presented. The conclusion highlights trade-offs among methods, limitations of current approaches, and prospects for further research in derivative valuation under non-Gaussian, heteroskedastic processes. Issues of numerical stability, risk assessment, and practical implementation are also considered.**

***Keywords*—ARIMA-GARCH, options, risk-neutral measure, heavy tails, Girsanov theorem, incomplete market.**

References

[1] George E. P. Box and Gwilym M. Jenkins. Time Series Analysis: Forecasting and Control. HoldenDay, 1970.

[2] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of uk inflation. Econometrica, vol. 50, no. 4, pp. 987–1007, 1982.

[3] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, 1986.

[4] Ruey S. Tsay. Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, 2005.

[5] Carol Alexander. Market Risk Analysis, Volume II: Practical Financial Econometrics. John Wiley & Sons, 2008.

[6] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.

[7] J. Michael Harrison and David M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. Journal of Economic Theory, vol. 20, no. 3, pp. 381–408, 1979.

[8] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. The Mathematics of Arbitrage. Springer, 2006.

[9] A. A. Novikov. On an identity for stochastic integrals. Theory of Probability & Its Applications, vol. 17, no. 4, pp. 717–720, 1972.

[10] Norihiko Kazamaki. Continuous exponential martingales and bmo. Lecture Notes in Mathematics, 1579, 1994.

[11] Hans Fo¨llmer and Martin Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. Applied Stochastic Analysis, pp. 389–414, 1991.

[12] John H. Cochrane. Asset Pricing. Princeton University Press, 2005.

[13] Huyen Pham. Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications. Springer, 2009.

[14] Jin-Chuan Duan. The garch option pricing model. Mathematical Finance, vol. 5, no. 1, pp. 13–32, 1995.

[15] Steven L. Heston and Saikat Nandi. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies, vol. 13, no. 3, pp. 585–625, 2000.

[16] Tetsuya Takaishi. Bayesian estimation of garch model by hybrid monte carlo. arXiv preprint physics/0702240, 2007.

[17] Peter Christoffersen, Kris Jacobs, and Karim Mimouni. Volatility dynamics for the s&p500: Evidence from realized volatility, daily returns and option prices. EFA 2007 Ljubljana Meetings Paper. url: https://ssrn.com/abstract=926373

[18] Stavros Degiannakis, George Filis, Tony Klein, and Thomas Walther. Forecasting realized volatility of agricultural commodities. International Journal of Forecasting, vol. 38, no. 1, pp. 74–96, 2019.

[19] Svetlozar T. Rachev, Stefan Mittnik, Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, and Teo Jasic. Fat-tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing. John Wiley & Sons, 2005

[20] А. Р. Данилишин. Approximation of Girsanov's measure with logarithmic returns in the case of heavy-tailed distributions. Proceedings of the Institute of System Analysis of the Russian Academy of Sciences, vol. 73, no. 3, pp. 21–30, 2023.

[21] A.R. Danilishin, D.Yu. Golembiovsky. Estimation the fair value of options based on arima-garch models with errors distributed according to the Johnson's SU law. Informatics and Applications, vol. 14, no. 4, pp. 83–90, 2020.

[22] A.R. Danilishin, D.Yu. Golembiovsky. Risk-neutral dynamics for the arima-garch random process with errors distributed according to the Johnson's SU law. Informatics and Applications, vol. 14, no. 1, pp. 48–55, 2020.

[23] A.R. Danilishin. Risk-neutral dynamics of the asset portfolio by using the principal component method. Proceedings of the Institute of System Analysis of the Russian Academy of Sciences, vol. 70, no. 3, pp. 13–23, 2020.