

# Диаграммы многомерно-матричных сетей

Е.И. Гончаров, Т.А. Самойлова

**Аннотация**— Визуализация — важный тип представления информации, используемый для упрощения ее восприятия. Существуют графические интерпретации объектов из самых разных предметных областей. В 1971 году Роджер Пенроуз в статье “Применение тензоров отрицательной размерности” ввел правила для построения графических моделей сверточных тензорных операций, тем самым визуализировав их. Это существенно упростило запись группы сверточных операций, позволив представлять их в виде связного графа – тензорной сети. Сверточные операции над многомерными массивами данных широко используются в задачах разработки баз данных, построения олар-кубов, сверточных нейронных сетях, задачах на графах, задачах обработки изображения и многих других. Согласно работам Виктора Мунермана в качестве алгебры, для работы с многомерными объектами в рамках вышперечисленных задач, алгебра многомерных матриц предпочтительнее тензорной алгебре. В статье авторы анализируют правила графического представления Роджера на предмет их применимости к сверточным операциям алгебры многомерных матриц. В результате анализа было выявлено, что имеющиеся правила не удобно использовать при больших количествах сворачиваемых индексов и что они не применимы к  $(\lambda, \mu)$ -свернутому произведению многомерных матриц. Авторы приводят определения сверточных операций алгебры многомерных матриц, показывая их специфику, и строят их диаграммы. В качестве примера использования этих диаграмм приведено решение задачи построения всех возможных маршрутов в ориентированном ациклическом графе средствами  $(1, 0)$ -свернутого произведения. Авторы приводят пример использования диаграммы многомерно-матричной сети для решения задачи шифрования. Полученные результаты могут быть использованы как для обучения студентов алгебре многомерных матриц, так и для построения графического интерфейса взаимодействия с программно-аппаратным комплексом, реализующим алгебру многомерных матриц.

**Ключевые слова**— визуализация, диаграмма, тензорная сеть, алгебра многомерных матриц.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Визуальный тип восприятия — один из ведущих типов восприятия информации [1]. Визуализация может быть эффективно использована в:

- в образовательной среде [2-5] при изучении самых разных дисциплин;
- в построении мнемонических правил [6]. Например, неформальные определения свертки часто используют выражение: “ядро скользит над двумерным изображением, поэлементно выполняя операцию

умножения с той частью входных данных, над которой оно сейчас находится, и затем суммирует все полученные значения в один выходной пиксель [7]”;

- для описания исходных данных, например графы [8], ER-диаграммы баз данных [9], тернарные алгебры [10];
- визуализации данных, полученных в результате исследования [11-12];
- презентации проделанной работы [13-14];
- описании алгоритма [15-16].

Таким образом визуализировать можно практически все что угодно: семантику операций, объекты, участвующие в операциях и их результаты. Удачная визуализация позволяет компактнее записать последовательность действий и полученные результаты, кратко и информативно презентовать суть.

В работе [17] была представлена тензорную сетевую диаграмму можно рассматривать как граф, в котором узлы (или вершины) представляют собой отдельные тензоры, а ребра представляют собой суммирование по индексу. Свободные индексы изображаются как ребра (или ножки), прикрепленные только к одной вершине.

## II. ПРОБЛЕМЫ ТЕКУЩЕЙ РЕАЛИЗАЦИИ



Рис. 1. 2-мерная матрица

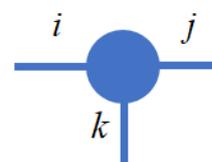


Рис. 2. 3-мерная матрица

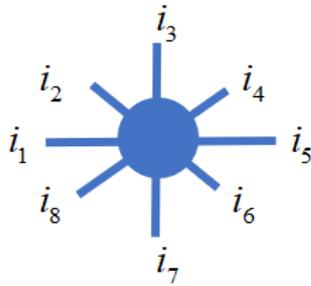


Рис. 3. 8-мерная матрица

В работе [18] автор предлагает использовать следующие обозначения для 2-мерной (см. рисунок 1) и 3-мерной матриц (см. рисунок 2.). И по аналогии увеличивать размерность. Однако, даже для относительно небольших размерностей такая графическая форма становится мало удобной (см. рисунок 3).

В работе [19] авторы используют следующие (см. рис. 4) обозначения для сверточных операций над многомерными матрицами.

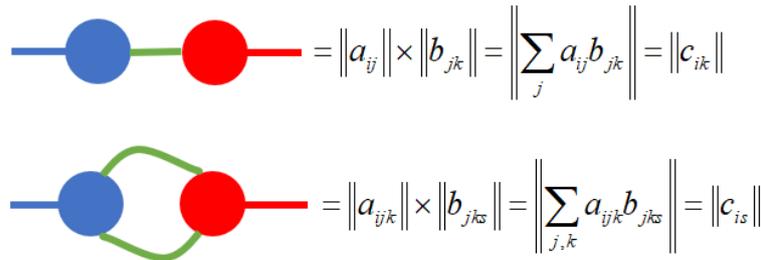


Рис. 4. Графические представления операторов со свертыванием по индексу

Кроме неудобств, в случае, когда сворачивать нужно хотя бы по 8 индексам, такой формат представления принципиально не позволяет представить операцию

$$\sum_i a_{ij_i} b_{ij_m} = \|c_{ij_m}\|$$

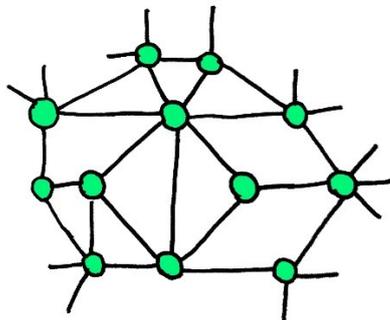


Рис. 5. Пример тензорной сети

В работах [17, 18] на основе диаграмм тензорных операций строят диаграммы тензорных сетей (см. пример на рисунке 5).

### III. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе [20] автор описывает алгебру многомерных матриц. Она является естественным обобщением алгебры плоских матриц. В ней можно выделить 2 операции, связанные со свертыванием по индексам:

$(\lambda, \mu)$ -свернутое произведение и  $\mu$ -свертыванием.

$(\lambda, \mu)$ -свернутое произведение является обобщением плоских матриц и используется для решения задач в разных предметных областях, таких как базы данных [21], криптография [22], задачи на графах [23], свертки [24]. Ее особенность – работа с группами индексов многомерных матриц. Пусть матрица  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  –  $p$ -

мерная матрица порядка  $N$ , а матрица  $B = \|b_{j_1 \dots j_q}\|$  –  $q$ -мерная матрица порядка  $N$ . Совокупности индексов этих матриц  $i_1, \dots, i_p$  и  $j_1, \dots, j_q$  разбиваются на четыре группы, содержащие соответственно  $\kappa, \lambda, \mu$  и  $\nu$  индексов, где  $\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$ . Причем  $\kappa + \lambda + \mu = p$ , а  $\lambda + \mu + \nu = q$ . Для полученных групп индексов используются обозначения:  $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$ ,  $c = (c_1, \dots, c_\mu)$  и  $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ . Тогда матрицы  $A$  и  $B$  можно представить в виде  $A = \|a_{lsc}\|$  и  $B = \|b_{csm}\|$ . Индексы разбиения  $c$  называются кэлиевыми,  $s$  – называются скоттовыми, а индексы разбиения  $m$  и  $l$  – свободными. Матрица  $T = \|t_{lsm}\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $t_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} b_{csm}$ , называется

$(\lambda, \mu)$ -свернутым произведением матриц  $A$  и  $B$ . Обозначается:  ${}^{\lambda, \mu}(A \times B) = T$ .

Пусть матрица  $A = \|a_{i_1 \dots i_p}\|$  –  $p$ -мерная матрица порядка  $N$ . Совокупности индексов этой матриц  $i_1, \dots, i_p$  разбиваются на две группы, содержащие соответственно  $\kappa$  и  $\mu$  индексов, где  $\kappa \geq 0$  и  $\mu > 0$ . Причем  $\kappa + \mu = p$ . Тогда матрицу  $A$  можно представить в виде  $A = \|a_{lc}\|$ . Матрица  $T = \|t_l\|$ , элементы которой вычисляются по формуле  $t_l = \sum_{(c)} a_{lc}$ , называется  $\mu$ -свертыванием матрицы  $A$ . Обозначается:  ${}^\mu A = T$ .

Целью работы является разработка диаграмм, описывающих сверточные операции алгебры многомерных матриц.

IV. ДИАГРАММЫ СВЕТОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ АЛГЕБРЫ  
МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

Наличие не более трех групп индексов в матрицах операндах решает проблемы с визуализацией операций, где свертывание идет по большому количеству индексов.

Скоттовы индексы будем обозначать пунктиром. Тогда при  $\mu > 0$  диаграммы  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  представлены в таб. 1.

Таблица 1. Диаграммы  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  при  $\mu > 0$

	${}^{\lambda, \mu} (\ a_{l_{sc}}\  \times \ b_{csm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{l_{sc}} b_{csm} \right\  = \ t_{lsm}\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda > 0, \\ \nu > 0, \\ \kappa > 0 \end{aligned}$
	${}^{\lambda, \mu} (\ a_{sc}\  \times \ b_{csm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{sc} b_{csm} \right\  = \ t_{sm}\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda > 0, \\ \nu > 0, \\ \kappa = 0 \end{aligned}$
	${}^{\lambda, \mu} (\ a_{l_{sc}}\  \times \ b_{cs}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{l_{sc}} b_{cs} \right\  = \ t_{ls}\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda > 0, \\ \nu = 0, \\ \kappa > 0 \end{aligned}$
	${}^{\lambda, \mu} (\ a_{sc}\  \times \ b_{cs}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{sc} b_{cs} \right\  = \ t_s\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda > 0, \\ \nu = 0, \\ \kappa = 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_{l_c}\  \times \ b_{cm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{l_c} b_{cm} \right\  = \ t_{lm}\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda = 0, \\ \nu > 0, \\ \kappa > 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_c\  \times \ b_{cm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_c b_{cm} \right\  = \ t_m\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda = 0, \\ \nu > 0, \\ \kappa = 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_{l_c}\  \times \ b_c\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{l_c} b_c \right\  = \ t_l\ $	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda = 0, \\ \nu = 0, \\ \kappa > 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_c\  \times \ b_c\ ) = \sum_{(c)} a_c b_c = t$	$\begin{aligned} \mu > 0, \\ \lambda = 0, \\ \nu = 0, \\ \kappa = 0 \end{aligned}$

При  $\mu = 0$  диаграммы  $(\lambda, \mu)$  - свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  представлены в таб. 2.

Таблица 2. Диаграммы  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  при  $\mu = 0$

	$\lambda, \mu (\ a_{lsc}\  \times \ b_{csm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{lsc} b_{csm} \right\  = \ t_{ism}\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &> 0, \\ \nu &> 0, \\ \kappa &> 0 \end{aligned}$
	$\lambda, \mu (\ a_{sc}\  \times \ b_{csm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{sc} b_{csm} \right\  = \ t_{sm}\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &> 0, \\ \nu &> 0, \\ \kappa &= 0 \end{aligned}$
	$\lambda, \mu (\ a_{lsc}\  \times \ b_{cs}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{lsc} b_{cs} \right\  = \ t_{ls}\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &> 0, \\ \nu &= 0, \\ \kappa &> 0 \end{aligned}$
	$\lambda, \mu (\ a_{sc}\  \times \ b_{cs}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{sc} b_{cs} \right\  = \ t_s\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &> 0, \\ \nu &= 0, \\ \kappa &= 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_{lc}\  \times \ b_{cm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{lc} b_{cm} \right\  = \ t_{lm}\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &= 0, \\ \nu &> 0, \\ \kappa &> 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_c\  \times \ b_{cm}\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_c b_{cm} \right\  = \ t_m\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &= 0, \\ \nu &> 0, \\ \kappa &= 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_{lc}\  \times \ b_c\ ) = \left\  \sum_{(c)} a_{lc} b_c \right\  = \ t_l\ $	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &= 0, \\ \nu &= 0, \\ \kappa &> 0 \end{aligned}$
	${}^{0, \mu} (\ a_c\  \times \ b_c\ ) = \sum_{(c)} a_c b_c = t$	$\begin{aligned} \mu &> 0, \\ \lambda &= 0, \\ \nu &= 0, \\ \kappa &= 0 \end{aligned}$

Как видно из таблиц  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$  безумно вариативна за счет всевозможных комбинаций индексов в группах матриц. Число всех возможных  $(\lambda, \mu)$ -свернутых произведений

$p$ -мерной матрицы  $A$  на  $q$ -мерную матрицу  $B$  вычисляется по формуле

$$N_{p,q} = \sum_{\lambda+\mu=0}^{\min(p,q)} \frac{p!}{\lambda! \mu! (p-\lambda-\mu)!} \cdot \frac{q!}{\lambda! \mu! (q-\lambda-\mu)!}$$

Диаграммы  $\mu$  - свертывания матрицы  $A$  представлены в таб. 3.

Таблица 3. Диаграммы  $\mu$ -свертывания матрицы  $A$

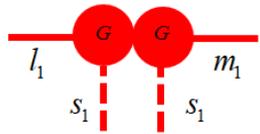
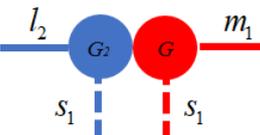
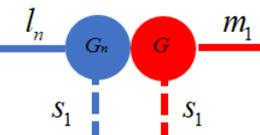
	${}^\mu \ a_{lc}\  = \left\  \sum_{(c)} a_{lc} \right\  = \ t_l\ $	$\mu > 0,$ $\kappa > 0$
	${}^\mu \ a_c\  = \left\  \sum_{(c)} a_c \right\  = t$	$\mu > 0,$ $\kappa = 0$

V. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ МАРШРУТОВ В ОРИЕНТИРОВАННОМ АЦИКЛИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Решение задачи построения всех возможных маршрутов в ориентированном ациклическом графе реализуется на основе применения (1,0)-свернутого произведения. Пусть матрица  $G = \|w_{i_1 i_2}\|$  – матрица смежности графа. После (1,0)-свернутого произведения матрицы  $G$  на себя получается трехмерная матрица  $G^2 = \|w_{i_1 i_2 i_3}\|$ . Эта матрица содержит сведения обо всех маршрутах, проходящих по двум ребрам. После (1,0)-свернутого произведения матрицы  $G^2$  на матрицу  $G$  получается четырехмерная матрица  $G^3 = \|w_{i_1 i_2 i_3 i_4}\|$ .

Матрица  $G^3$  содержит сведения обо всех маршрутах, проходящих по трем ребрам. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена матрица, все элементы которой – нейтральные. Предшествующая ей матрица  $G^k$  содержит сведения обо всех маршрутах, состоящих из  $k$  ребер. Тогда, если элемент  $w_{i_1^* i_2^* \dots i_l^*}$  ( $2 < l \leq k$ ) отличен от нейтрального элемента, то последовательность значений индексов  $i_1^*, i_2^*, \dots, i_l^*$  есть последовательность вершин, через которые проходит маршрут, начинающийся в вершине  $i_1^*$  заканчивающийся в вершине  $i_l^*$  проходящий по  $l$  ребрам и обладающий свойством, определяемым значением  $w_{i_1^* i_2^* \dots i_l^*}$  [23]. В рамках диаграмм этот алгоритм представлен в таб. 4.

Таблица 4. Построения всех возможных маршрутов в ориентированном ациклическом графе

	$G_2 = {}^{1,0}(G \times G)$ - матрица всех маршрутов, проходящих по двум ребрам
	$G_3 = {}^{1,0}(G_2 \times G)$ - матрица всех маршрутов, проходящих по трем ребрам
...	...
	$G_{n+1} = {}^{1,0}(G_n \times G)$ - матрица всех маршрутов, проходящих по n+1 ребрам

VI. СЕТИ

$(\lambda, \mu)$ -свернутое произведение матриц  $A$  и  $B$  в общем случае не ассоциативно. В примере 6 при выполнении операций слева направо результатом будет 5-мерная матрица, а слова на права – 7-мерная матрица. Тем не менее можно выделять частные случаи сетей, обладающих свойством ассоциативности. Ассоциативный закон умножения матриц одного и того

же порядка  $\left( {}^{\lambda, \mu} (A \times {}^{\lambda', \mu'} (B \times C)) \right) = {}^{\lambda', \mu'} \left( {}^{\lambda, \mu} (A \times B) \times C \right)$

имеет место при условии, что свертываемые совокупности кэлиевых индексов в разных парах перемножаемых матриц не пересекаются между собой и с совокупностями скоттовых индексов. Пример ассоциативной сети представлен на рисунке 7.

Пусть матрица  $C$  из рисунка 7 является обратной к  $B$  относительно  $E(2,3)$ , то есть  ${}^{2,3}(B \times C) = E(2,3)$ , где

${}^{2,3}(X \times E(2,3)) = X = {}^{2,3}(E(2,3) \times X) \quad \forall$  8-мерной матрицы  $X$ . Тогда проход слева направо по сети из рисунка 7 можно трактовать как алгоритм шифрования Хилла на многомерных матрицах: последовательное получение шифр текста и его декодирование [22].

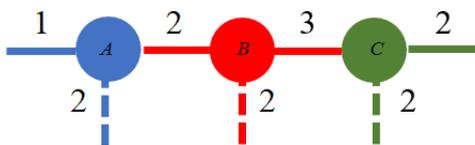


Рис. 6. Не ассоциативная сеть

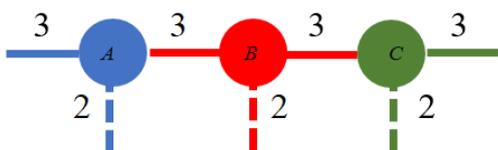


Рис. 7. Ассоциативная сеть

## VII. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Данные диаграммы могут использоваться при обучении студентов алгебре многомерных матриц. Так же они могут лечь в основу графического интерфейса к программно-аппаратному комплексу, реализующего алгебру многомерных матриц [25, 26]. Это позволит в режиме конструктора (no-code / low-code) [27] задавать желаемые последовательности операций алгебры многомерных матриц.

## VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе диаграмм тензорных сетей были введены диаграммы  $\mu$ -свертывания матрицы  $A$  и  $(\lambda, \mu)$ -свернутого произведения матриц  $A$  и  $B$ . Это позволяет

- компактно записывать и передавать в систему последовательности операций в рамках алгебры многомерных матриц;
- упрощает их восприятие.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Николайчик М. И., Семериков К. В. Исследование типов восприятия информации у студентов. – 2019.
- [2] Селина М. А. Типы восприятия информации обучающимися и их роль в изучении иностранного языка //Всероссийский филологический форум. – 2022. – С. 32-36.
- [3] Долженкова В. И. Теоретические основы визуального обучения //Проблемы педагогики. – 2015. – №. 4 (5). – С. 17-23.
- [4] Дмитриева Е. А., Шагова О. А. Использование компонентов УМК линии «Сферы» по биологии на основе учета ведущего типа восприятия информации школьниками //Ярославский педагогический вестник. – 2015. – №. 4. – С. 27-32.
- [5] Яковлева Е. В. Обучение математике иностранных студентов в университете на основе когнитивно-визуального подхода //Вестник Вятского государственного университета. – 2020. – №. 1. – С. 84-93.
- [6] Бирюкова Н. Ю. Роль визуализации в обучении иностранному языку: мнемонический метод использования флэш-карт //Образование. Карьера. Общество. – 2012. – №. 2 (34). – С. 65-68.
- [7] Маршалко Д.А., Кубанских О.В. Архитектура свёрточных нейронных сетей // Ученые записки Брянского государственного университета. 2019. №4 (16). URL:

<https://cyberleninka.ru/article/n/arhitektura-svyortochnyh-neyronnyh-setey> (дата обращения: 14.08.2024).

- [8] Касьянов В. Н., Касьянова Е. В. Визуализация графов и графовых моделей. – Закрытое акционерное общество " Сибирское научное издательство", 2010.
- [9] Коршунова И. С. и др. Разработка ER-диаграммы для СУБД PostgreSQL психоллингвистической базы данных RuWordPerception. – 2021.
- [10] Емельченков Е. П., Гончаров Е. И. Тернарные алгебры Холла. II //Системы компьютерной математики и их приложения. – 2019. – №. 20-2. – С. 59-64.
- [11] Мاستицкий С., Шитиков В. Статистический анализ и визуализация данных с помощью R. – Litres, 2022.
- [12] Коломеец М. В., Чечулин А. А., Котенко И. В. Обзор методологических примитивов для поэтапного построения модели визуализации данных //Информатика и автоматизация. – 2015. – Т. 5. – №. 42. – С. 232-257.
- [13] Ганжара О. А. Проблемы визуализации данных в презентации социально-значимого материала //Статистический анализ социально-экономического развития федеральных округов Российской Федерации: опыт, реалии, перспективы. – 2020. – С. 149-150.
- [14] Мушко В. В. Инфографика и презентация данных. № УД-5637/уч. – 2018.
- [15] Оленев А. А., Киричек К. А., Потехина Е. В. Программа для визуализации основных логических операций. – 2021.
- [16] Вохмин А. А., Евдокимова О. А., Маляво А. А. Визуально-графическая система программирования на основе разработки блок-схем алгоритмов. Конвертирование текстов программ на различных языках программирования в блок-схемы и обратно //Южно-Сибирский научный вестник. – 2021. – №. 3. – С. 49-57.
- [17] Penrose R. et al. Applications of negative dimensional tensors //Combinatorial mathematics and its applications. – 1971. – Т. 1. – С. 221-244.
- [18] Matrices as Tensor Network Diagrams // URL: <https://www.math3ma.com/blog/matrices-as-tensor-network-diagrams> (дата обращения: 14.08.2024).
- [19] Bridgeman J. C., Chubb C. T. Hand-waving and interpretive dance: an introductory course on tensor networks //Journal of physics A: Mathematical and theoretical. – 2017. – Т. 50. – №. 22. – С. 223001.
- [20] Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972 г. – 176 с.
- [21] Е. И. Гончаров. К вопросу о многомерных базах данных. Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXV Международной научной конференции, – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2024, Вып. 25. – с. 116-124.
- [22] Е. И. Гончаров, В. И. Мунерман, Т.А. Самойлова. Выбор параметров многомерных матриц для обобщенного алгоритма шифрования Хилла. Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции, – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019, Вып. 20. – с. 111-116.
- [23] Мунерман В. И., Самойлова Т. А. Алгебраический подход к алгоритмизации задач маршрутизации //Системы высокой доступности. Т. 14, № 5., г. 2018, стр. 50-56, DOI: 10.18127/j20729472-201805-08
- [24] Гончаров Е. И. Многомерно-матричное определение операции свертки // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, №3. – С. 541-549. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.541-549>
- [25] Е.И. Гончаров, В.И. Мунерман, И.Н. Синицын. Современные технологические средства создания многомерно-матричных машин баз данных // Системы высокой доступности. 2024. – Т. 20, № 1. – С. 5-15. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20729472-202401-01>
- [26] Goncharov E., Munerman V., Yakovlev G. Software and Hardware Complex for Calculating Convolutions by Methods Multidimensional Matrix Algebra //2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). – IEEE, 2021. – С. 2176-2180.
- [27] Rokis K., Kirikova M. Challenges of low-code/no-code software development: A literature review //International Conference on Business Informatics Research. – Cham : Springer International Publishing, 2022. – С. 3-17.

# Multidimensional Matrix Network Diagrams

Evgeniy Goncharov, Tatyana Samoilova

**Abstract** - Visualization is an important type of information representation used to simplify the perception of information. In 1971, Roger Penrose in his article "Applications of negative dimensional tensors" introduced rules for constructing graphical models of convolution tensor operations, thus visualizing them. Convolutions of multidimensional data arrays are widely used in database development tasks, olap-cube construction, CNN, graph-based tasks, image processing tasks and many others. According to the works of Victor Munerman, the multidimensional matrix algebra is preferred to tensor algebra as an algebra for working with multidimensional objects in the framework of the above problems. In this article, the authors analyze Roger's graphical representation rules for their applicability to convolution operations of multidimensional matrix algebra. The analysis reveals that the available rules are not convenient to use for large numbers of convolution indices and that they are not applicable to  $(\lambda, \mu)$ -convolution product of multidimensional matrices. The authors give definitions of convolution operations of the algebra of multidimensional matrices, show their specificity, and construct their diagrams. As an example of using these diagrams, the authors give a solution to the problem of constructing all possible routes in an oriented acyclic graph by means of  $(1, 0)$ -convolution product. The authors give an example of using the multidimensional matrix network diagram to solve the encryption problem. The obtained results can be used both for teaching students the algebra of multidimensional matrices and for building a graphical interface for interaction with a hardware-software complex realizing the algebra of multidimensional matrices.

**Keywords** - visualization, diagram, tensor network, multidimensional matrices algebra.

## REFERENCES

- [1] Nikolajchik M. I., Semerikov K. V. Issledovanie tipov vosprijatija informacii u studentov. – 2019.
- [2] Selina M. A. Tipy vosprijatija informacii obuchajushhimisja i ih rol' v izuchenii inostrannogo jazyka //Vserossijskij filologicheskij forum. – 2022. – S. 32-36.
- [3] Dolzhenkova V. I. Teoreticheskie osnovy vizual'nogo obuchenija //Problemy pedagogiki. – 2015. – №. 4 (5). – S. 17-23.
- [4] Dmitrieva E. A., Shagova O. A. Ispol'zovanie komponentov UMK linii «Sfery» po biologii na osnove ucheta vedushhego tipa vosprijatija informacii shkol'nikami //Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2015. – №. 4. – S. 27-32.
- [5] Jakovleva E. V. Obuchenie matematike inostrannyh studentov v universitete na osnove kognitivno-vizual'nogo podhoda //Vestnik Vjatskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2020. – №. 1. – S. 84-93.
- [6] Birjukova N. Ju. Rol' vizualizacii v obuchenii inostrannomu jazyku: mnemonicheskij metod ispol'zovanija fljesh-kart //Obrazovanie. Kar'era. Obshestvo. – 2012. – №. 2 (34). – S. 65-68.
- [7] Marshalko D.A., Kubanski O.V. Arhitektura svjortochnyh nejronnyh setej // Uchenye zapiski Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta. 2019. №4 (16). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/arhitektura-svjortochnyh-nejronnyh-setej> (data obrashhenija: 14.08.2024).
- [8] Kas'janov V. N., Kas'janova E. V. Vizualizacija grafov i grafovnyh modelej. – Zakrytoe akcionernoe obshhestvo" Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo", 2010.
- [9] Korshunova I. S. i dr. Razrabotka ER-diagrammy dlja SUBD PostgreSQL psiholingvisticheskoj bazy dannyh RuWordPerception. – 2021.
- [10] Emel'chenkov E. P., Goncharov E. I. Ternamye algebrы Holla. II //Sistemy komp'juternoj matematiki i ih prilozhenija. – 2019. – №. 20-2. – S. 59-64.
- [11] Mastickij S., Shitikov V. Statisticheskij analiz i vizualizacija dannyh s pomoshh'ju R. – Litres, 2022.
- [12] Kolomeec M. V., Chechulin A. A., Kotenko I. V. Obzor metodologicheskikh primitivov dlja pojetapnogo postroenija modeli vizualizacii dannyh //Informatika i avtomatizacija. – 2015. – T. 5. – №. 42. – S. 232-257.
- [13] Ganzhara O. A. Problemy vizualizacii dannyh v prezentacii social'no-znachimogo materiala //Statisticheskij analiz social'no-jekonomicheskogo razvitija federal'nyh okrugov Rossijskoj Federacii: opyt, realii, perspektivy. – 2020. – S. 149-150.
- [14] Mushko V. V. Infografika i prezentacija dannyh. № UD-5637/uch. – 2018.
- [15] Olenev A. A., Kirichek K. A., Potehina E. V. Programma dlja vizualizacii osnovnyh logicheskikh operacij. – 2021.
- [16] Vohmin A. A., Evdokimova O. A., Maljavko A. A. Vizual'no-graficheskaja sistema programmirovanija na osnove razrabotki blokshem algoritmov. Konvertirovanie tekstov programm na razlichnyh jazykah programmirovanija v blok-shemy i obratno //Juzhno-Sibirskij nauchnyj vestnik. – 2021. – №. 3. – S. 49-57.
- [17] Penrose R. et al. Applications of negative dimensional tensors //Combinatorial mathematics and its applications. – 1971. – T. 1. – C. 221-244.
- [18] Matrices as Tensor Network Diagrams // URL: <https://www.math3ma.com/blog/matrices-as-tensor-network-diagrams> (data obrashhenija: 14.08.2024).
- [19] Bridgeman J. C., Chubb C. T. Hand-waving and interpretive dance: an introductory course on tensor networks //Journal of physics A: Mathematical and theoretical. – 2017. – T. 50. – №. 22. – C. 223001.
- [20] Sokolov N.P. Vvedenie v teoriju mnogomernyh matric. – Kiev: Naukova dumka, 1972 g. – 176 s.
- [21] E. I. Goncharov. K voprosu o mnogomernyh bazah dannyh. Sistemy komp'juternoj matematiki i ih prilozhenija: materialy XXV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, – Smolensk: Izd-vo SmolGU, 2024, Vyp. 25. – s. 116-124.
- [22] E. I. Goncharov, V. I. Munerman, T.A. Samojlova. Vybor parametrov mnogomernyh matric dlja obobshhennogo algoritma shifrovanija Hilla. Sistemy komp'juternoj matematiki i ih prilozhenija: materialy XX Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, – Smolensk: Izd-vo SmolGU, 2019, Vyp. 20. – s. 111-116.
- [23] Munerman V. I., Samojlova T. A. Algebraicheskij podhod k algoritimizacii zadach marshrutizacii //Sistemy vysokoj dostupnosti. T. 14, № 5., g. 2018, str. 50-56, DOI: 10.18127/j20729472-201805-08
- [24] Goncharov E.I. Multi-Dimensional Definition of Convolution // Modern Information Technologies and IT-Education. 2021. Vol. 7, No. 3. P. 541-549. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.541-549>
- [25] Goncharov E.I., Munerman V.I., Sinitsyn I.N. Modern technological tools for creating multidimensional matrix database machines // Highly Available Systems. 2024. V. 20, No. 1. P. 5–15. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20729472-202401-01>
- [26] Goncharov E., Munerman V., Yakovlev G. Software and Hardware Complex for Calculating Convolutions by Methods Multidimensional Matrix Algebra //2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). – IEEE, 2021. – C. 2176-2180.
- [27] Rokis K., Kirikova M. Challenges of low-code/no-code software development: A literature review //International Conference on Business Informatics Research. – Cham : Springer International Publishing, 2022. – C. 3-17.