

Исследование асимптотик решений дифференциальных уравнений 2-го порядка с мероморфными коэффициентами

Чэн Шияо

Аннотация — В данной работе исследуются асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с мероморфными коэффициентами в окрестностях иррегулярных особых точек. В отличие от этого, иррегулярные особые точки характеризуются наличием экспоненциальных членов в решениях, что связано с тем, что старший коэффициент дифференциального оператора стремится к нулю быстрее, чем допускается для регулярных особенностей. Основное внимание уделяется вычислению всех коэффициентов в этих разложениях как в случае, когда корни основного символа дифференциального оператора являются простыми, так и в случае, когда они кратные. Кроме того, подробно рассматривается и детально анализируется случай, когда уравнение содержит кратные корни, поскольку такие ситуации существенно усложняют структуру асимптотических разложений решений. В работе доказано, что для любого уравнения с кратными корнями всегда существует преобразование, которое приводит его к эквивалентному уравнению с простыми корнями, одновременно уменьшая порядок вырождения дифференциального оператора. Более того, показано, что в ряде случаев такое преобразование может привести уравнение к уравнению Фуксового типа, то есть регулярному. Полученные результаты расширяют методы асимптотического анализа на более широкий класс сингулярных дифференциальных уравнений, включая уравнения с высокой степенью вырождения.

Ключевые слова — коэффициенты, асимптотики решений, вырождение, дифференциальные уравнения.

I. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка с особенностью (регулярной или иррегулярной):

$$b^2(r)u''(r) + b^1(r)u'(r) + b^0(r)u(r) = 0, \quad (1)$$

здесь $b^0(r)$, $b^1(r)$, $b^2(r)$ — мероморфные функции. $b^m(r) = r^{q_m}c_m(r)$, $m = 0, 1, 2$, где функции $c_m(r)$ — голоморфные функции такие, что $c_m(0) \neq 0$. Числа $q_m \in \mathbb{Z}$ будем называть степенями вырождения функций $b^m(r)$. В работе [1] показано, что (1) может быть приведено к виду

$$\left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) + a_1(r) \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) u(r) + a_0(r)u(r) = 0, \quad (2)$$

где $a_0(r)$, $a_1(r)$ — голоморфные функции, k — целое неотрицательное число. Кроме того, в этой работе найдено минимальное такое k . Оно называется порядком вырождения дифференциального оператора. Если минимальное $k = 0$, то точка $r = 0$ является неособой точкой (2), если $k = 1$, то $r = 0$ является регулярной особой точкой, если $k > 1$, то тогда точка является иррегулярной.

Символом дифференциального оператора:

$$\hat{H} = \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right)^2 + a_1(r) \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) + a_0(r), \quad (3)$$

называется функция $H(r, p) = p^2 + a_1(r)p + a_0(r)$.

Определение 1. Основным символом оператора 2-го порядка (3) называется функция

$$H_0(p) = H(0, p). \quad (4)$$

Изучение асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек остается актуальной задачей, начиная с XIX века. Вопрос о общем виде асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек в общем виде был сформулирован Пуанкаре в работах [2], [3], где исследовался случай, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность.

Эти вопросы обсуждались Э.Л. Айнсом в 1939 году [4], Э.А. Коддингтоном и Н. Левинсоном в 1958 году [5], Л. Чезари в 1964 году [6] и Ф. Олвером в 1974 году [7]. В их работах были построены асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных особых точек, представленные в виде произведений соответствующих экспонент и формальных степенных рядов. Однако вопрос трактовки полученных формальных, вообще говоря расходящихся рядов оставался нерешенным до конца 1980-х годов, когда был разработан метод ресургентного анализа в основе которого лежит интегральное преобразование Лапласа-Борелля и концепция ресургентных функций предложенная Экалем [8]–[10].

Используя метод ресургентного анализа, в работе [11] для случая $k = 2$, а в работе [12] для случая $k > 2$ была доказана ресургентность решений обыкновенных

дифференциальных уравнений с вырождением типа кнопа, а тем самым и для уравнений с голоморфными коэффициентами, при условии ресургентности правой части. Таким образом, этот результат позволяет применять преобразование Лапласа-Бореля и метод ресургентного анализа для построения асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами.

Благодаря этому результату в работе [11] для случая $k = 2$, а в работе [13], [14] для случая $k > 2$ был построен вид регулярных асимптотических разложений решений для случая, когда корни полинома $H_0(p)$ являются простыми.

Теорема 1. Пусть f – ресургентная функция, тогда решение уравнения $H\left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}, r\right)u(r) = f$ является ресургентной функцией в пространстве $E(S_R)$. Если $H_0(p)$ имеет простые корни в точках $p_1, \dots, p_m$, тогда асимптотика решения в пространстве $E(S_R)$, однородного уравнения $H\left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}, r\right)u(r) = 0$ имеет виде

1. при $k = 2$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^m \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \quad (5)$$

2. при $k > 2$, $k \in \mathbb{N}$

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^m \exp\left(\frac{p_j}{r^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\alpha_i^j}{r^{k-1-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \quad (6)$$

3. в случае если $k = \frac{b}{n}$, $b \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $b > n$, асимптотика решения будет иметь вид

$$u(r) \approx \sum_j \exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{b}{n}-1}} + \sum_{i=1}^{b-n-1} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{b}{n}-1-i}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{n}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^{\frac{i}{n}}, \quad (7)$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$. Здесь через σ_j , α_i^j и b_i^j , $j = 1, \dots, m$ обозначены некоторые числа.

А с применением метода ресургентного анализа проблема построения асимптотик для вырождающихся однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка с произвольными голоморфными коэффициентами была решена в работе М.В. Коровиной и О.В. Мативосяна [15]. С некоторыми ограничениями этот результат был обобщен на уравнения второго порядка с частными производными.

В работе было показано, что все асимптотики решений любых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности иррегулярных особенностей представила в виде суммы слагаемых вида

$$u_j(r) = \exp\left(\frac{p_j}{r^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\alpha_i^j}{r^{k-1-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \quad (8)$$

или вида

$$u_j(r) = \exp\left(\frac{p_j}{r^{k-\frac{3}{2}}} + \sum_{i=1}^{2k-4} \frac{\alpha_i^j}{r^{k-\frac{3}{2}-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^{\frac{i}{2}}, \quad (9)$$

здесь p_j , σ_j , α_i^j и b_i^j – некоторые константы, k – целое

неотрицательное число и $k \geq 2$, $j = 1, 2$.

Целью данной работы является вычисление коэффициентов α_i^j , σ_j и b_i^j в асимптотиках (8), (9) для дифференциальных уравнений 2-го порядка как для случая, когда основной символ $H_0(p)$ имеет два простых корня, так в случае кратного корня.

II. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

A. Случай, когда основной символ имеет простые корни

В данном разделе будут вычислены коэффициенты асимптотики решения вида (7) в случае, когда основной символ $H_0(p)$ имеет простые корни.

Без ограничения общности будем считать, что один из корней основного символа дифференциального оператора равен нулю. Запишем (1) с простыми корнями в нуле в виде:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) u \\ &+ a_0^1 r u + a_0^2 r^2 u + \dots \\ &+ a_0^{k-1} r^{k-1} u \\ &+ [r \bar{a}_1(r) \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) \\ &+ r^k \bar{a}_0(r)] u = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

в скобках стоят младшие слагаемые, которые не влияют на вид асимптотики и от них зависят только коэффициенты b_i^j . Основной символ имеет вид $H_0(p) = p^2 + a_1^0 p = p(p + a_1^0)$.

Предположим, что уравнений имеет простые корни. Это значит, что $a_1^0 \neq 0$. В начале найдем асимптотику соответствующие $p_1 = 0$.

Тогда общий вид асимптотик соответствующих корню $p_1 = 0$ имеют вид

$$\hat{u}_1(r) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{\alpha_i^1}{r^{k-1-i}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i, \quad (11)$$

сначала вычисляем коэффициенты α_i^j , σ_j и b_i^j в асимптотиках (11) для дифференциальных уравнений 2-го порядка в виде (10).

Чтобы исключить главные члены в (10) требуется сделать ряд экспоненциальных подстановок.

Сделаем первую экспоненциальную подстановку:

$u(r) = e^{\frac{\lambda_1}{r^{k-2}}} u_1(r)$, тогда (10) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u_1 + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) u_1 \\ &+ (a_0^1 + a_0^1 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1}) r u_1 + (a_0^2 \\ &+ \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2) r^2 u_1 + \dots \\ &+ a_0^{k-1} r^{k-1} u_1 \\ &+ [r a_1^{(1)}(r) \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) \\ &+ r^k a_0^{(1)}(r)] u_1 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

коэффициенты $a_1^{(1)}(r)$ и $a_0^{(1)}(r)$ относятся к младшим членам, и

$$a_1^{(1)}(r) = \bar{a}_1(r) + 2\lambda_1 \frac{k-2}{k-1},$$

$$a_0^{(1)}(r) = \bar{a}_0(r) - \lambda_1 \frac{k-2}{(k-1)^2}.$$

Сделаем вторую экспоненциальную подстановку:

$u_1(r) = e^{\frac{\lambda_2}{r^{k-3}}} u_2(r)$, мы получим:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u_2 + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right) u_2 \\ & + (a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1}) r u_2 + (a_0^2 \\ & + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 \\ & + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1}) r^2 u_2 + a_0^3 r^3 u_2 \\ & + (a_0^4 + \lambda_2^2 \left(\frac{k-3}{k-1}\right)^2) r^4 u_2 \\ & + \dots + a_0^{k-1} r^{k-1} u_2 \\ & + \left[r a_1^{(2)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right) \right. \\ & \left. + r^k a_0^{(2)}(r) \right] u_2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

коэффициенты $a_1^{(2)}(r)$ и $a_0^{(2)}(r)$ относятся к младшим членам, и

$$a_1^{(2)}(r) = a_1^{(1)}(r) + 2\lambda_2 \frac{k-3}{k-1} r,$$

$$a_0^{(2)}(r) = a_0^{(1)}(r) - 2\lambda_2 \frac{k-3}{(k-1)^2} r.$$

Таким образом мы показали, что на первом шаге при экспоненциальной подстановке $u(r) = e^{\frac{\lambda_1}{r^{k-2}}} u_1(r)$, меняются коэффициенты a_0^1, a_0^2 при первой и второй степени r . А именно

$$a_0^1 \rightarrow a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1},$$

$$a_0^2 \rightarrow a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2.$$

На втором шаге при экспоненциальной подстановке $u_1(r) = e^{\frac{\lambda_2}{r^{k-3}}} u_2(r)$ меняются коэффициенты при r^2 и при r^4 а именно

$$a_0^1 \rightarrow a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1},$$

$$a_0^2 \rightarrow a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1},$$

$$a_0^3 \rightarrow a_0^3,$$

$$a_0^4 \rightarrow a_0^4 + \lambda_2^2 \left(\frac{k-3}{k-1}\right)^2.$$

Остальные коэффициенты не меняются.

На i -ом шаге при экспоненциальной подстановке $u_{i-1}(r) = e^{\frac{\lambda_i}{r^{k-i-1}}} u_i(r)$ меняются только коэффициенты при r^i и r^{2i} . К коэффициенту при r^i добавляется слагаемое $a_1^0 \lambda_i \frac{k-i-1}{k-1}$, а к коэффициенту при r^{2i} добавляется слагаемое $\lambda_i^2 \left(\frac{k-i-1}{k-1}\right)^2$. Остальные слагаемые остаются без изменения.

Рассмотрим два случая.

1. k – четное число, тогда получим

$$a_0^1 \rightarrow a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1},$$

$$a_0^2 \rightarrow a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1},$$

...

$$a_0^{2n-1} \rightarrow a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1} \frac{k-2n}{k-1},$$

$$a_0^{2n} \rightarrow a_0^{2n} + \lambda_n^2 \left(\frac{k-n-1}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n} \frac{k-2n-1}{k-1},$$

...

$$a_0^{k-2} \rightarrow a_0^{k-2} + \lambda_{\frac{k-2}{2}}^2 \left(\frac{\frac{k}{2}}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_{k-2} \frac{1}{k-1}.$$

Таким образом мы доказали, что коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}$ определяются из системы уравнений

$$a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1} = 0,$$

$$a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1} = 0,$$

...

$$a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1} \frac{k-2n}{k-1} = 0, \quad (14)$$

$$a_0^{2n} + \lambda_n^2 \left(\frac{k-n-1}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n} \frac{k-2n-1}{k-1} = 0,$$

...

$$a_0^{k-2} + \lambda_{\frac{k-2}{2}}^2 \left(\frac{\frac{k}{2}}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_{k-2} \frac{1}{k-1} = 0.$$

Очевидно, что (10) относительно функции u_{k-1} имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u_{k-1} + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right) u_{k-1} \\ & + a_0^{k-1} r^{k-1} u_{k-1} \\ & + \left[r a_1^{(k-2)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right) \right. \\ & \left. + r^k a_0^{(k-2)}(r) \right] u_{k-1} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

сделав степенную подстановку

$$u_{k-1} = r^{\delta_1} u_k,$$

где $-\frac{a_1^0 \delta_1}{k-1} + a_0^{k-1} = 0$, тогда (15) относительно функции u_k примет вид

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u_k + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right) u_k \\ & + \left[r a_1^{(k-1)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr}\right) \right. \\ & \left. + r^k a_0^{(k-1)}(r) \right] u_k = 0. \end{aligned}$$

2. Пусть теперь k – нечетное число.

При нечетном k для определения чисел $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k-2$ получим систему уравнений

$$a_0^1 \rightarrow a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1},$$

$$a_0^2 \rightarrow a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1},$$

...

$$a_0^{2n-1} \rightarrow a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1} \frac{k-2n}{k-1},$$

$$a_0^{2n} \rightarrow a_0^{2n} + \lambda_n^2 \left(\frac{k-n-1}{k-1}\right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n} \frac{k-2n-1}{k-1},$$

...

$$a_0^{k-2} \rightarrow a_0^{k-2} + a_1^0 \lambda_{k-2} \frac{1}{k-1}.$$

Таким образом мы доказали, что коэффициенты λ_i , $i = 1, 2, \dots, k-2$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1} &= 0, \\ a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1} \frac{k-2n}{k-1} &= 0, \\ a_0^{2n} + \lambda_n^2 \left(\frac{k-n-1}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n} \frac{k-2n-1}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{k-2} + a_1^0 \lambda_{k-2} \frac{1}{k-1} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно, что (10) относительно функции u_{k-1} имеет вид

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 u_{k-1} + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) u_{k-1} \\ + (a_0^{k-1} + \frac{1}{4} \lambda_{k-1}^2) r^{k-1} u_{k-1} \\ + \left[r a_1^{(k-2)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) \right. \\ \left. + r^k a_0^{(k-2)}(r) \right] u_{k-1} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

сделав степенную подстановку

$$u_{k-1} = r^{\delta_1} u_k,$$

где $-\frac{\delta_1 a_1^0}{k-1} + \frac{1}{4} \lambda_{k-1}^2 + a_0^{k-1} = 0$, тогда (17) относительно функции u_k примет вид

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 u_k + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) u_k \\ + \left[r a_1^{(k-1)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) \right. \\ \left. + r^k a_0^{(k-1)}(r) \right] u_k = 0. \end{aligned}$$

Окончательно мы получили, что при условии $a_1^0 \neq 0$, асимптотический член, соответствующий нулевому корню $p_1 = 0$ основного символа будет иметь вид

$$\hat{u}_1(r) = e^{\sum_{i=1}^{k-2} \frac{\lambda_i}{r^{k-i-1}} r^{\delta_1}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i. \quad (18)$$

Теорема 2. Коэффициенты λ_i , $i = 1, 2, \dots, k-2$ и δ_1 в асимптотиках (18) соответствующие нулевому корню $p_1 = 0$ в случае, когда k – четное число определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1} &= 0, \\ a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1} \frac{k-2n}{k-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1 \\ a_0^{2n} + \lambda_n^2 \left(\frac{k-n-1}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n} \frac{k-2n-1}{k-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (19)$$

$$a_0^{k-2} + \lambda_{\frac{k-2}{2}}^2 \left(\frac{\frac{k}{2}}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{k-2} \frac{1}{k-1} = 0,$$

а число δ_1 определяется из равенства

$$\delta_1 = \frac{(k-1)a_0^{k-1}}{a_1^0}.$$

В случае, когда k – нечетное число. Коэффициенты λ_i , $i = 1, 2, \dots, k-2$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0^1 + a_1^0 \lambda_1 \frac{k-2}{k-1} &= 0, \\ a_0^2 + \lambda_1^2 \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_2 \frac{k-3}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1} \frac{k-2n}{k-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2} \\ a_0^{2n} + \lambda_n^2 \left(\frac{k-n-1}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n} \frac{k-2n-1}{k-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \frac{k-1}{2} \\ &\dots \\ a_0^{k-2} + a_1^0 \lambda_{k-2} \frac{1}{k-1} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

а число δ_1 определяется из равенства

$$\delta_1 = (k-1) \frac{\frac{1}{4} \lambda_{\frac{k-1}{2}}^2 + a_0^{k-1}}{a_1^0}.$$

Заметим, что системы (19), (20) разрешимы, поскольку их матрицы являются треугольными матрицами с ненулевыми элементами на диагонали, в частности a_1^0 .

Осталось вычислить коэффициенты рядов в асимптотике (18).

Можно переписать (2) в виде (21) при условии, когда основной символ имеет простые корни:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 u + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) u \\ + \sum_{i=1}^{\infty} a_1^i r^i \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) u \\ + \sum_{i=k}^{\infty} a_0^i r^i u = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь основной символ имеет вид $H_0(p) = p^2 + a_1^0 p = p(p + a_1^0)$.

Поставим $u = \sum_{i=0}^{\infty} b_i r^i$, в (21), получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(k-1)^2} \sum_{i=1}^{\infty} i(i+k-1)b_i r^{i+2k-2} \\
& - a_1^0 \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} i b_i r^{i+k-1} \\
& - a_1^1 \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} i b_i r^{i+k} \\
& - a_1^2 \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} i b_i r^{i+k+1} - \dots \quad (22) \\
& + a_0^k \sum_{i=0}^{\infty} b_i r^{i+k} \\
& + a_0^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i r^{i+k+1} \\
& + a_0^{k+2} \sum_{i=0}^{\infty} b_i r^{i+k+2} + \dots = 0,
\end{aligned}$$

Таким образом мы показали, что слагаемые члены при степени r^k :

$$-a_1^0 \frac{1}{k-1} b_1 + a_0^k b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = (k-1) \frac{a_0^k}{a_1^0} b_0,$$

при степени r^{k+1} :

$$-2a_1^0 \frac{1}{k-1} b_2 - a_1^1 \frac{1}{k-1} b_1 + a_0^k b_1 + a_0^{k+1} b_0 = 0,$$

при степени r^{k+2} :

$$\begin{aligned}
& -3a_1^0 \frac{1}{k-1} b_3 - 2a_1^1 \frac{1}{k-1} b_2 - a_1^2 \frac{1}{k-1} b_1 + a_0^k b_2 \\
& + a_0^{k+1} b_1 + a_0^{k+2} b_0 = 0,
\end{aligned}$$

при степени r^{k+3} :

$$\begin{aligned}
& -4a_1^0 \frac{1}{k-1} b_4 - 3a_1^1 \frac{1}{k-1} b_3 - 2a_1^2 \frac{1}{k-1} b_2 \\
& - a_1^3 \frac{1}{k-1} b_1 + a_0^k b_3 + a_0^{k+1} b_2 + a_0^{k+2} b_1 \\
& + a_0^{k+3} b_0 = 0,
\end{aligned}$$

при степени r^{k+m} , $0 \leq m < k-1$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{m+1}{k-1} a_1^0 b_{m+1} - \frac{m}{k-1} a_1^1 b_m - \frac{m-1}{k-1} a_1^2 b_{m-1} - \dots \\
& - \frac{1}{k-1} a_1^m b_1 + a_0^k b_m + a_0^{k+1} b_{m-1} \\
& + a_0^{k+2} b_{m-2} + \dots + a_0^{k+m} b_0 = 0 \Rightarrow \\
& -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{m+1} i a_1^{m+1-i} b_i + \sum_{i=0}^m a_0^{k+i} b_{m-i} = 0,
\end{aligned}$$

при степени r^{k+m} , $m = k-1$:

$$\frac{k}{(k-1)^2} b_1 - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{m+1} i a_1^{m+1-i} b_i + \sum_{i=0}^m a_0^{k+i} b_{m-i} = 0,$$

при степени r^{k+m} , $m = k+l > k-1$, $l = -1, 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
& \frac{(l+2)(k+l+1)}{(k-1)^2} b_{l+2} \\
& - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{m+1} i a_1^{m+1-i} b_i \\
& + \sum_{i=0}^m a_0^{k+i} b_{m-i} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получим следующую теорему о коэффициентах b_i .

Теорема 3. Коэффициенты b_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ в

асимптотиках (18) соответствующие простому корню $p_1 = 0$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{k-1} a_1^0 b_1 + a_0^k b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = (k-1) \frac{a_0^k}{a_1^0} b_0, \\
& -\frac{1}{k-1} 2a_1^0 b_2 - \frac{1}{k-1} a_1^1 b_1 + a_0^k b_1 + a_0^{k+1} b_0 = 0, \\
& \dots \\
& -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} i a_1^{k-j-i} b_i \\
& + \sum_{i=0}^{k-j-1} a_0^{k+i} b_{k-j-i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \\
& \dots \\
& -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} i a_1^{k-1-i} b_i + \sum_{i=0}^{k-2} a_0^{k+i} b_{k-2-i} = 0, \\
& -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k i a_1^{k-i} b_i \\
& + \sum_{i=0}^{k-1} a_0^{k+i} b_{k-1-i} + \frac{k}{(k-1)^2} b_1 = 0, \\
& -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k+1} i a_1^{k+1-i} b_i \\
& + \sum_{i=0}^k a_0^{k+i} b_{k-i} + \frac{2(k+1)}{(k-1)^2} b_2 = 0, \\
& \dots \\
& -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k+j} i a_1^{k+j-i} b_i \\
& + \sum_{i=0}^{k+j-1} a_0^{k+i} b_{k+j-1-i} \\
& + \frac{(j+1)(k+j)}{(k-1)^2} b_{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \quad (23)$$

Данная система разрешима, так как матрица этой системы имеет треугольный вид и на диагонали стоят ненулевые элементы a_1^0 .

Заметим, что коэффициенты определяются с точностью до множителя, так как b_0 – произвольная константа.

Чтобы построить асимптотику, соответствующую корню основного символа $p = -a_1^0 \neq 0$ сделаем первую экспоненциальную подстановку: $u(r) = e^{\frac{p_1}{r^{k-1}}} v(r)$, $p_1 = -a_1^0$, мы получим:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 v - a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) v \\
& + a_1^0 r v + a_0^2 r^2 v + \dots \\
& + a_0^{k-1} r^{k-1} v \\
& + \left[r a_1^{(0)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) \right. \\
& \left. + r^k a_0^{(0)}(r) \right] v = 0,
\end{aligned} \quad (24)$$

новый основной символ $H_0(p) = p^2 - a_1^0 p = p(p - a_1^0)$. То есть корень основного символа с помощью экспоненциальной подстановки сдвинут в ноль. Остальные расчеты аналогичны предыдущему случаю, где $p = 0$.

В. Случай, когда основной символ имеет кратные корни

В данном разделе рассматриваются (2) в случае, когда корень полинома $H_0(p)$ являются кратными.

Рассмотрим (1), пусть теперь $a_1^0 = 0$. В этом случае корень уравнения кратный и (2) можно приводиться к виду

$$\left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) + r^{k_1} \bar{a}_1(r) \left(-r^k \frac{d}{dr}\right) u(r) + r^{k_0} \bar{a}_0(r) u(r) = 0, \quad (25)$$

здесь $k > 0$, $\bar{a}_1(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^1 r^i$, $\bar{a}_0(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^0 r^i$, $a_1^1 \neq 0$, $a_0^0 \neq 0$. Очевидно $H_0(p) = p^2$. Поэтому корень $p = 0$ имеет кратность 2.

Преобразуем (25) разделив его на r^{2x} ,

$$\left(-r^{k-x} \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) - (2k-x)r^{k-x-1} \left(-r^{k-x} \frac{d}{dr}\right) u(r) + r^{k_1-x} \bar{a}_1(r) \left(-r^{k-x} \frac{d}{dr}\right) u(r) + r^{k_0-2x} \bar{a}_0(r) u(r) = 0. \quad (26)$$

Предполагаем, что $k_1 \geq k-1$ и $k_0 \geq 2(k-1)$, тогда получим уравнение Фуксова типа. Это следует из того, что, положив $x = k-1$ получим уравнение фуксова типа, так как порядок вырождения будет равен 1.

Когда выполнено хотя бы одно из неравенств $k_1 < k-1$ или $k_0 < 2(k-1)$. Тогда выберем x следующим образом

$$x = \min\left(k_1, \frac{k_0}{2}\right).$$

Тогда если $k_1 > \frac{k_0}{2}$, то выбрав $x = \frac{k_0}{2}$ получим (27)

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} r^{k - \frac{k_0}{2}} \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) \\ & - \frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} \left(2k - \frac{k_0}{2}\right) r^{k - \frac{k_0}{2} - 1} \left(-\frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} r^{k - \frac{k_0}{2}} \frac{d}{dr}\right) u(r) \\ & + \frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} r^{k_1 - \frac{k_0}{2}} \bar{a}_1(r) \left(-\frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} r^{k - \frac{k_0}{2}} \frac{d}{dr}\right) u(r) \\ & + \left(\frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1}\right)^2 \bar{a}_0(r) u(r) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Его основной символ $H_0(p) = p^2 + \left(\frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1}\right)^2 a_0^0$, так как $a_0^0 \neq 0$, то корни простые.

Из теоремы 1 следует, что асимптотики имеют вид:

При $k - \frac{k_0}{2} > 2$, $k \in N$, k_0 – четное число, то получили

уравнение с простыми корнями типа (2). Коэффициенты асимптотики решения (27) вычисляются по формулам из Теоремы 2. также как это было сделано выше.

Если k_0 – нечетное число, то найдется такое $b \in N$, $b > 2$ что выполнено равенство $k - \frac{k_0}{2} = \frac{b}{2}$, b – нечетное число. Из Теоремы 1 следует, что асимптотика решения будет иметь вид

$$u(r) = \sum_{j=1}^2 \exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{b}{2}-1}} + \sum_{i=1}^{b-3} \frac{a_i^j}{r^{\frac{b-i}{2}-1}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^{\frac{i}{2}}, \quad (28)$$

Сделаем замену $r = t^2$ и так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} r^{k - \frac{k_0}{2}} \frac{d}{dr} u &= \frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} r^{k - \frac{k_0}{2}} \frac{du}{dt} \frac{dt}{dr} \\ &= \frac{1}{k - \frac{k_0}{2} - 1} (t^2)^{k - \frac{k_0}{2}} \frac{du}{dt} \frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{1}{2k - k_0 - 2} t^{2k - k_0 - 1} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

То перепишем (27) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2k - k_0 - 2} t^{2k - k_0 - 1} \frac{d}{dt}\right)^2 v(t) \\ & - \frac{1}{2k - k_0 - 2} \left(2k - \frac{k_0}{2}\right) t^{2k - k_0 - 2} \\ & * \left(-\frac{1}{2k - k_0 - 2} t^{2k - k_0 - 1} \frac{d}{dt}\right) v(t) \\ & + \frac{1}{2k - k_0 - 2} t^{2k_1 - k_0} \bar{a}_1(t^2) \\ & * \left(-\frac{1}{2k - k_0 - 2} t^{2k - k_0 - 1} \frac{d}{dt}\right) v(t) \\ & + \left(\frac{1}{2k - k_0 - 2}\right)^2 \bar{a}_0(t^2) v(t) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Это уравнение с простыми корнями с основным символом типа (2). Коэффициенты в асимптотике (28) его решения также вычисляются по (28) из теоремы 2.

Пусть $k_1 < \frac{k_0}{2}$ то выбрав $x = k_1$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k - k_1 - 1} r^{k - k_1} \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) \\ & - \frac{1}{k - k_1 - 1} (2k - k_1) r^{k - k_1 - 1} \left(-\frac{1}{k - k_1 - 1} r^{k - k_1} \frac{d}{dr}\right) u(r) \\ & + \frac{1}{k - k_1 - 1} \bar{a}_1(r) \left(-\frac{1}{k - k_1 - 1} r^{k - k_1} \frac{d}{dr}\right) u(r) \\ & + \left(\frac{1}{k - k_1 - 1}\right)^2 r^{k_0 - 2k_1} \bar{a}_0(r) u(r) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Основной символ оператора $H_0(p) = p^2 + \frac{1}{k - k_1 - 1} a_1^0 p$.

Так как $a_1^0 \neq 0$ то корни основного символа являются простыми.

Пусть $k_1 = \frac{k_0}{2} < k-1$, положим $x = k_1 = \frac{k_0}{2}$, подставим в (26), получим уравнение

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{k-x-1} r^{k-x} \frac{d}{dr} \right)^2 u(r) \\
& - \frac{1}{k-x-1} (2k \\
& - x) r^{k-x-1} \left(-\frac{1}{k-x-1} r^{k-x} \frac{d}{dr} \right) \\
& + \frac{1}{k-x-1} \bar{a}_1(r) \left(-\frac{1}{k-x-1} r^{k-x} \frac{d}{dr} \right) u(r) \\
& + \left(\frac{1}{k-x-1} \right)^2 \bar{a}_0(r) u(r) = 0.
\end{aligned} \quad (31)$$

Основной символ равен $H_0(p) = p^2 + \frac{1}{k-k_1-1} a_0^1 p + \left(\frac{1}{k-\frac{k_0}{2}-1} \right)^2 a_0^0$. Если этот многочлен имеет кратный корень, то сдвинув его в ноль сведем последнее уравнение к уравнению вида (26) с вырождением порядка $k-x$, где $x = k_1 = \frac{k_0}{2}$.

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. Любое уравнение с кратным корнем можно привести либо к виду уравнения Фуксова типа, либо к виду уравнения с простыми корнями основного символа.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность М.В. Коровиной за многочисленные обсуждения и помощь при написании данной работы.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Кац Д.С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. № 12. – с. 1612-1617.
- [2] Poincaré H. Sur les intégrales irrégulières: Des équations linéaires // Acta Mathematica. – 1886. – Т. 8. № 1. – с. 295-344.
- [3] Poincaré H. Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincaré // Selected Works: Mathematics; Theoretical Physics. – 1974. – Vol. 3.
- [4] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков : Научно-техническое издательство Украины, 1939. – 719 с.
- [5] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 475 с.
- [6] Л. Чезари. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 477 с.
- [7] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. Пер. с англ. под ред. А. П. Прудникова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 528 с.
- [8] E'calle J. Resurgent functions // Vol. I-III Mathematical Publications of Orsay. 1981. C. 81–05.
- [9] E'calle J. Les Fonctions Resurgentes Vol. I-III // Publ. Math. Orsay. 1981. T. 15.
- [10] E'calle J. The acceleration operators and their applications // Proc. In. 1990.
- [11] Коровина М.В., Шаталов В.Е. Дифференциальные уравнения с вырождением и резургентный анализ // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. № 9. – с. 1259–1277.
- [12] Коровина М.В. Существование резургентного решения для уравнений с вырождениями высших порядков // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47. № 3. – с. 349–357.
- [13] Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 437. № 3. – с. 302–304.
- [14] Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений со старшими вырождениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. № 5. – с. 710–722.
- [15] Korovina M. V., Matevossian H.A. Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic

- Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. № 14. – p. 2465.
 [16] Dorigoni D. An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus // Annals of Physics. – 2019. – Vol. 409. – p. 167914.

Investigation of asymptotics of solutions of second-order differential equations with meromorphic coefficients

Cheng Shiyao

Abstract — This paper investigates the asymptotic expansions of solutions to second-order ordinary differential equations with meromorphic coefficients in the vicinity of irregular singular points. Unlike regular singular points, irregular singular points are characterized by the presence of exponential terms in the solutions, which is related to the fact that the leading coefficient of the differential operator tends to zero faster than allowed for regular singularities. The primary focus is on computing all the coefficients in these expansions, both in cases where the roots of the principal symbol of the differential operator are simple and where they are multiple. Additionally, particular attention is given to the case where the equation contains multiple roots, as such situations significantly complicate the structure of the asymptotic expansions of solutions. The study proves that for any equation with multiple roots, there always exists a transformation that reduces it to an equivalent equation with simple roots while simultaneously decreasing the order of degeneracy of the differential operator. Furthermore, it is shown that in some cases, such a transformation can convert the equation into a Fuchsian-type equation, i.e., a regular one. The results obtained extend asymptotic analysis methods to a broader class of singular differential equations, including those with a high degree of degeneracy.

Keywords — coefficients, asymptotic of solutions, degenerate, differential equations.

REFERENCES

- [1] Kats D.S. Computation of the asymptotics of solutions for equations with polynomial degeneration of the coefficients // *Differential Equations*. – 2015. – T. 51. № 12. – c. 1589-1594.
- [2] Poincaré H. Sur les intégrales irrégulières: Des équations linéaires // *Acta Mathematica*. – 1886. – T. 8. № 1. – c. 295-344.
- [3] Poincaré H. Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincaré // *Selected Works: Mathematics; Theoretical Physics*. – 1974. – Vol. 3.
- [4] Ince E. L. Ordinary differential equations. – Dover Publications, 1956. – 576 pp.
- [5] Coddington E., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. – New York : McGraw-Hill, 1955. – 444 pp.
- [6] L. Cesari. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. – Springer Science & Business Media, 2012. – T. 16. – 274 pp.
- [7] Olver F. Asymptotics and Special Functions. – New York : Academic Press, 1974. – 572 pp.
- [8] Écalle J. Resurgent functions // Vol. I-III *Mathematical Publications of Orsay*. 1981. C. 81–05.
- [9] Écalle J. Les Fonctions Resurgentes Vol. I-III // *Publ. Math. Orsay*. 1981. T. 15.
- [10] Écalle J. The acceleration operators and their applications // *Proc. In*. 1990.
- [11] Korovina M. V., Shatalov V. E. Differential equations with degeneration and resurgent analysis // *Differential Equations*. – 2010. – T. 46. № 9. – c. 1267–1286.
- [12] Korovina M. V. Existence of resurgent solutions for equations with higher-order degeneration // *Differential Equations*. – 2011. – T. 47. № 3. – c. 346–354.
- [13] Korovina M. V. Asymptotics solutions of equations with higher-order degeneracies // *Doklady Mathematics*. – 2011. – T. 83. № 2. – c. 182–184.
- [14] Korovina M. V. Asymptotics of solutions of equations with higher degenerations // *Differential Equations*. – 2012. – T. 48. № 5. – c. 717–729.
- [15] Korovina M. V., Matevosian H.A. Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications // *Mathematics*. – 2022. – Vol. 10. № 14. – p. 2465.
- [16] Dorigoni D. An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus // *Annals of Physics*. – 2019. – Vol. 409. – p. 167914.