Сходимость алгоритма полного интуиционистского нечеткой кластеризации С-средних

Зунг Тхи Тху Нгуен

Аннотация— **В этой статье рассматривается сходимость метода полной интуиционистской нечеткой кластеризации С_средних (CIFCM). Метод польной интуиционистской нечеткой кластеризации С-средних на основе модификации целевой функции, учитывающей интуиционистский индекс нечеткости, является более эффективным методом модификации метода интуиционистской нечеткой кластеризации С_средних. Целевой функцией алгоритма кластеризации является серия итераций Пикара в соответствии с обновлением матрицы принадлежности и центров кластеров. Обычно для решения проблемы сходимости последовательностей Пикара используются теоремы о неподвижных точках, классическим случаем которых является теорема о сокращающемся отображении. Последовательности Пикара, основанные на методе нечеткой кластеризации С-средних алгоритм (FCM), не позволяет проверить свойство контракции в основном из-за двухкомпонентной композиционной природы одной итерации. Поэтому в этой работе, рассматривается сходимость метода полной интуиционистской нечеткой кластеризации С_средних с помощью теоремы Цангвилла, Итерационная последовательность, создаваемая алгоритмом метода полной интуиционистской нечеткой кластеризации С-средних, заканчивается в локальном минимуме или седловой точке, или, в крайнем случае, содержит под последовательность, которая заканчивается в локальном минимуме или седловой точке целевой функции алгоритма полной интуиционистской нечеткой кластеризации С_средних.**

Ключевые слова—**Полная интуиционистская нечеткая кластеризация С_средних, теорема Цангвилла, сходимость.**

I. Введение

В настоящее время алгоритмы кластеризации значительно развиваются и могут быть разделены на два типа: жесткая кластеризация и нечеткая кластеризация. По сравнению с традиционным алгоритмом жесткой кластеризации, алгоритм нечеткой кластеризации имеет хорошую производительность кластеризации и лучшие навыки стали горячей области исследований [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Нечеткий алгоритм кластеризации С-средних (FCM) является наиболее популярным и широко используемым. Целевой функцией алгоритма кластеризации является серия итераций Пикара в соответствии с обновлением матрицы принадлежности и центров кластеров. Обычно для решения проблемы сходимости последовательностей Пикара используются теоремы о неподвижных точках, классическим случаем которых является теорема о сокращающемся отображении [1], [7], [8], [9]. Последовательности Пикара, основанные на FCM алгоритм, до сих пор сопротивлялись усилиям в этом направлении, в основном из-за двухкомпонентной композиционной природы одной итерации, которая не позволяет проверить свойство контракции. Поэтому доказательство сходимости алгоритма предлагаемого метода может быть преобразовано в доказательство сходимости получения оптимального решения вышеуказанной целевой функции итерационным методом. Бездек доказал, что итерационная последовательность, генерируемая алгоритмом FCM, или существование подпоследовательностей, сходящихся к локальному минимуму объективной функции, основано на теореме Зангвилла [10], [11], [12], [13]. Наряду с этим, алгоритм интуиционистской нечеткой кластеризации С-средних (IFCM) является комплексной формой FCM, более точно моделирующей реальность за счет учета степени колебаний, которые часто существуют в реальности из-за недостатка или неконкретной или неопределенной информации. Метод полной интуитивной нечеткой кластеризации С-средних (CIFCM) является более эффективным методом модификации метода IFCM [14], [15], [16], [17], [18], [19]. В этой статье рассматривается сходимость метода полной интуиционистской нечеткой кластеризации С_средних. С помощью теоремы Цангвилла итерационная последовательность, создаваемая алгоритмом CIFCM, заканчивается в локальном минимуме или седловой точке, или, в крайнем случае, содержит подпоследовательность, которая заканчивается в локальном минимуме или седловой точке целевой функции алгоритма кластеризации.

II. Теоретические основы

A. *Математическая основа метода полной интуиционистской нечеткой кластеризации С-средних.*

Предположим, в s-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^s$, имеет n элементов $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n\}$, разделенных на c кластеры с центрами кластеров с матрицей $\widehat{\boldsymbol{V}} \in \boldsymbol{V_{cn}}$, состоящей из центров кластеров $\widehat{\boldsymbol{V}} = \{\hat{V}_1, \hat{V}_2, \ldots, \hat{V}_j, \ldots, \hat{V}_c\}$. Полная принадлежность i-го

Статья получена 20 декабря 2023.

Нгуен Тхи Тху Зунг, аспирантка, Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого (e-mail: thudung.mta.tb@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9206-5968).

элемента к c кластерам определяется как $\sum_{j=1}^{c}\hat{\mu}_{ij}=1$. Матрица принадлежности $\hat{\boldsymbol{U}}=[\hat{\mu}_{ij}]\in\boldsymbol{V_{cn}}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,c}$. Пусть множество $M_{ifc}=\{\hat{\boldsymbol{U}}\in\boldsymbol{V_{cn}}\}$- множество интуиционистских нечетких с-разбиений X.

Степень неопределенности первоначально вычисляется вычисляются из интуиционистского нечеткого дополнения Ягера, как:

$$\hat{\pi}_{ij}=1-\hat{\mu}_{ij}-(1-\hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha}\ (1)$$

Где $\alpha>0$. В предлагаемом алгоритме интуиционистской нечеткой кластеризации целевая функция $J_m:(M_{ifc}\times\boldsymbol{R}^{cs})\to\boldsymbol{R}$, которая должна быть минимизирована, имеет следующий вид:

$$J_m=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}_{ij}+\gamma\hat{\pi}_{ij})^m d^2(X_i,\hat{V}_j)(2)$$

Где m - коэффициент нечеткости. В предлагаемом методе используется евклидова мера расстояния, т. е.

$$d^2(X_i,\hat{V}_j)=(x_{i1}-\hat{v}_{j1})^2+\cdots+(x_{ik}-\hat{v}_{jk})^2+\ldots+(x_{is}-\hat{v}_{js})^2(3)$$

Использован метод множителей Лагранжа для минимизации целевой функции при условии ограничения $\sum_{j=1}^{c}\hat{\mu}_{ij}=1$. Лагранжиан $L(m,\lambda)$ строится на основе целевой функции и ограничения следующим образом:

$$L(m,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(\hat{\mu}_{ij}+\gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m d^2\left(X_i,\hat{V}_j\right)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{c}\hat{\mu}_{ij}-1\right)\ (4)$$

Дифференцируем уравнение *(5)* относительно множителей Лагранжа λ_i и по параметру принадлежности $\hat{\mu}_{ij}$, потом приравняем их нулю следующим образом. В результате получается итерационная формула для значения принадлежности $\hat{\mu}_{ij}$ следующим образом:

$$\hat{\mu}_{ij}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\frac{zd^{\frac{-2}{m-1}}}{zd^{\frac{-2}{m-1}}}}\left(1+\gamma\sum_{j=1}^{c}\hat{\pi}_{ij}\right)-\gamma\hat{\pi}_{ij};\ (5)$$

где $z=\left[1-\gamma+\gamma\hat{\mu}_{ij}{}^{(\alpha-1)}\left(1-\hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{\frac{-1}{m-1}}$

Тогда, центр кластера $\hat{V}_j=(\hat{v}_{j1},\hat{v}_{j2},\ldots,\hat{v}_{jk},\ldots,\hat{v}_{jd})$ вычислена как:

$$\hat{V}_j=\frac{\sum_j^N\left[\hat{\mu}_{ij}+\gamma-\gamma\hat{\mu}_{ij}-\gamma(1-\hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha}\right]^m X_i}{\sum_j^N\left[\hat{\mu}_{ij}+\gamma-\gamma\hat{\mu}_{ij}-\gamma(1-\hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha}\right]^m};\ (6)$$

По поводу условий (6 - 7) сделаем несколько замечаний:

1) Уравнение (6, 7) необходимо, но недостаточно для того, чтобы $(\hat{U}^*,\hat{V}^*)$было локальным минимумом J_m,

2) При $\gamma\to 0$ алгоритм постепенно приближается к алгоритму FCM, при $m\overset{+}{\to}1$ к алгоритму K-means. Доказана сходимость этих двух алгоритмов.

3) Интуиционистские нечеткие алгоритмы кластеризации представляют собой итерацию Пикара по циклу, определенному (6-7).

Таким образом, мы определяем составной оператор $T_m:(M_{ifc}\to M_{ifc})$ с условиями (6-7) по

$$\hat{U}^{(k)}=T_m\left(\hat{U}^{(k-1)}\right)=\ldots=(T_m)^{(k)}\left(\hat{U}^{(0)}\right);k=1,2,\ldots$$

Вопрос, который мы пытаемся решить ниже, заключается в том, сходится ли итерационная последовательность $(T_m)^{(k)}\left(\hat{U}^{(0)}\right)$ к $\left(\hat{U}^*\right)$, так что $\left(\hat{U}^*,\hat{V}^*\right)$ является локальным минимумом J_m. Для этого необходимо уточнить оператор T_m.

Соответственно, пусть:

$$F:\boldsymbol{R}^{cs}\to M_{ifc},F\left(\hat{V}\right)=F\left(\hat{V}_1,\hat{V}_2,\ldots,\hat{V}_c\right)=\hat{U}=\left[\hat{\mu}_{ij}\right]\ (8)$$

где элементы $\hat{U}=\left[\hat{\mu}_{ij}\right]=F\left(\hat{V}\right)$ вычисляются по (6) с расстоянием (4)

Пусть

$$G:M_{ifc}\to\boldsymbol{R}^{cs},G(\hat{U})=\hat{V}=\left(\hat{V}_1,\hat{V}_2,\ldots,\hat{V}_c\right)\ (9)$$

где векторы $\hat{V}_j\in\boldsymbol{R}^s$ вычисляются по (7) при $1\le j\le c$.

Используя F и G, интуиционистские нечеткие алгоритмы кластеризации можно указать в нескольких эквивалентных формах:

$$\hat{U}^{(k)}=(F\circ G)\left(\hat{U}^{(k-1)}\right)=\ldots=(F\circ G)^{(k)}\left(\hat{U}^{(0)}\right);\ (3^*)$$

$$\hat{V}^{(k)}=(G\circ F)\left(\hat{V}^{(k-1)}\right)=\ldots=(G\circ F)^{(k)}(\hat{V}^{(0)});\ (4^*)$$

Единственное различие между (3*) и (4*) заключается в том, как инициализировать алгоритм с $\hat{U}^{(0)}\in M_{ifc}$ или $\hat{V}^{(0)}\in\boldsymbol{R}^{cs}$; любая форма представляет собой вычислительную технику, используемую для (надеемся) оптимизации $J_m(\hat{U},\hat{V})$. Наша цель ниже - доказать, что эта стратегия теоретически обоснована. Чтобы продолжить, мы должны модифицировать T_m таким образом, чтобы он генерировал последовательности Пикара одновременно в $\hat{U}$ и $\hat{V}$. Мы определяем оператор $J_m:\left(M_{ifc}\times\boldsymbol{R}^{cs}\right)\to\left(M_{ifc}\times\boldsymbol{R}^{cs}\right)$ следующим образом:

$$J_m=A_2\circ A_1$$

Где

$$A_1:M_{ifc}\times\boldsymbol{R}^{cs}\to\boldsymbol{R}^{cs};A_1(\hat{U},\hat{V})=G(\hat{U});$$

$$A_2:\boldsymbol{R}^{cs}\to M_{ifc}\times\boldsymbol{R}^{sc};A_2(\hat{V})=\left(F(\hat{V}),\hat{V}\right).$$

Явно записывая действие J_m на $\left(\hat{U},\hat{V}\right)$, пусть $\left(\hat{U},\hat{V}\right)$ обозначает $S\left(\hat{U},\hat{V}\right)$; тогда:

$$\begin{aligned}\left(\hat{U},\hat{V}\right)&=J_m(\hat{U},\hat{V})=(A_2\circ A_1)(\hat{U},\hat{V})\\&=A_2\left(A_1(\hat{U},\hat{V})\right)\\&=A_2(G(\hat{U}))\\&=(F(G(\hat{U})),G(\hat{U}))\\&=(F\circ G(\hat{U}),G(\hat{U}))\end{aligned}$$

В частности, свойства итерационного алгоритма J_m зависят от композиции $A_2\circ A_1$, которая, в свою очередь, лежит в $F\circ G$ и G, а значит, в конечном счете, в F и G, определенных в (8), (9) через (6), (7), соответственно. Мы подчеркиваем это, поскольку анализ ниже зависит именно от этого разложения.

B. Теорема Зангвилля

В данной работе для доказательства сходимости алгоритма, использующего уравнения (6-7), используется теорема Зангвилла о сходимости. Согласно теореме Зангвилла о сходимости итеративных последовательностей, объективная функция J является убывающей.

Эта задача является многоцелевой задачей оптимизации с ограничениями. Если итерационная формула функции имеет строгие локальные точки минимума, то сходимость алгоритма доказана.1.

Теорема Зангвилля:

Пусть $f: D_f \subset R^m \to R$:

$$S = \{x^* \in D_f: f(x^*) < f(y) \forall y \in B^0(x^*, r)\}$$

$$B^0(x^*, r) = \{y \in R^m: \|x^* - y\| \leq r\}$$

$A: D_f \to D_f$ - итерационный алгоритм, $x_{k+1} = A(x_k)$; $k = 0,1,\ldots$

ЕСЛИ:

(+) Существует непрерывная функция $g: D_f \to R$, такая, что:

(*) g - функция спуска для $\{A, S\}$

(**) A непрерывна на $D_f \backslash S$

(++) итерационные последовательности $\{A(x_k): k = 0,1,2,\ldots; x_0 \in D_f\} \subset K$содержатся в компактном множестве $K \subseteq D_f$ для произвольного$x_0 \in D_f$,

ТО: для каждой итерационной последовательности $\{x_k\}$, порожденной A, мы имеем либо $\{x_k\}$ заканчивающуюся на решении $x^* \in S$, либо $\exists$ подпоследовательность $\{x_{kj}\} \subset \{x_k\}$ так, что$\{x_{kj}\} \to x^* \in S$.

Теорема для функции спуска: $g: D_f \to R$ является функцией спуска для $\{A, S\}$ если:

+) g непрерывно на D_f;
+) $x^* \notin S \Rightarrow g(A(x^*)) < g(x^*)$;
+) $x^* \in S \Rightarrow g(A(x^*)) \leq g(x^*)$.

C. Необходимо доказательство сходимости предложенного метода

Пусть $J_m: (M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs}) \to (M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs})$, где J_m определяется по (3)

$$S = \{(\hat{U}^*, \hat{V}^*): J_m(\hat{U}^*, \hat{V}^*) < J_m(\hat{U}, \hat{V}), \forall(\hat{U}, \hat{V}) \in B^0((\hat{U}^*, \hat{V}^*), r)\}$$

Где $B^0(\hat{U}^*, \hat{V}^*) = \{(\hat{U}, \hat{V}) \in (M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs})\}$

ЕСЛИ: выполняются следующие условия,

(C1) J_m - функция спуска для $\{\Box_m, S\}$

(C2) J_m непрерывна на $(M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs})$

(C3) итерационные последовательности

$$\{(J_m)^k(\hat{U}^{(0)}, \hat{V}^{(0)}): k = 0,1,2,\ldots; (\hat{U}^{(0)}, \hat{V}^{(0)}) \in (M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs})\}$$

содержатся в компактном множестве $(M_{ifc} \times [conv(X)]^c)$ в $(M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs})$.

ТО для каждой итерационной последовательности $(\hat{U}^{(0)}, G(\hat{U}^{(0)})) \in M_{ifc} \times [conv(X)]^c$, мы имеем:

- либо $\{J_m{}^{(j)}(\hat{U}^{(0)}, \hat{V}^{(0)})\}$ заканчивается в локальном минимуме $(\hat{U}^*, \hat{V}^*)$,
- либо $\{J_m{}^{(j)}(\hat{U}^{(0)}, \hat{V}^{(0)})\}$ содержит подпоследовательность, такую, что $\{J_m{}^{(j_k)}(\hat{U}^{(0)}, \hat{V}^{(0)})\} \to (\hat{U}^*, \hat{V}^*)$, локальный минимум J_m при $j_k \to \infty$.

Таким образом, необходимо доказать леммы C1, C2 и C3. Сначала нам нужно доказать предложения П1 и П2.

Предложение 1: Если ψ: $M_{ifc} \to \boldsymbol{R}$, $\psi(\hat{U}) = J_m(\hat{U}, \hat{V})$, где $\hat{V} \in (\boldsymbol{R}^s)^{cs}$, то $\hat{U}^* \in M_{ifc}$ является строгим локальным минимумом функции ψ тогда и только тогда, когда $\hat{U}^*$ вычисляется по уравнению (6), $\hat{U}^* = F(\hat{V})$.

Предложение 2: Если ψ: $\boldsymbol{R}^{cs} \to \boldsymbol{R}$, $\psi(\hat{V}) = J_m(\hat{U}, \hat{V})$, где $\hat{U} \in M_{ifc}$, Тогда $\hat{V}^*$ является строгим локальным минимумом тогда и только тогда, когда $\hat{V}_j^*, 1 \leq j \leq c$ вычисляется через (7), $\hat{V}^* = G(\hat{U})$.

Лемма C1: пусть $S = \{(\hat{U}^*, \hat{V}^*): J_m(\hat{U}^*, \hat{V}^*) < J_m(\hat{U}, \hat{V})\}$, $\forall(\hat{U}, \hat{V}) \in B^0((\hat{U}^*, \hat{V}^*), r)$. То J_m - функция спуска для $\{\Box_m, S\}$.

Лемма C2: J_m непрерывна на $(M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs})$.

Лемма C3: Пусть $[conv(X)]^c$ - c-кратное декартово произведение выпуклой оболочки X, и пусть $(\hat{U}^{(0)}, G(\hat{U}^{(0)}))$ - начальная точка итерации с $\mathfrak{I}_m$, причем $\hat{U}^{(0)} \in M_{ifc}$ и $\hat{V}^{(0)} = G(\hat{U}^{(0)})$. Тогда $(\mathfrak{I}_m)^{(k)}(\hat{U}^{(0)}, \hat{V}^{(0)}) \in M_{ifc} \times [conv(X)]^c$, где $M_{ifc} \times [conv(X)]^c$ является компактным в $M_{ifc} \times R^{cs}$.

Мы предположили, что $m > 1$, $\gamma \to 1$, рассмотрим следующие свойства:

(1) $\mu_{ij} \in [0,1]$; $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, c}$. (7)

(2) Сумма каждого столбца U должна быть положительной, т. е. $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} > 0$, $j = \overline{1, c}$. (8)

(3) Сумма каждой строки U должна быть равна 1, т. е.$\sum_{j=1}^{c} \mu_{ij} = 1$, $i = \overline{1, n}$. (9)

D. Доказательство сходимости предложенного метода

Доказательство предложения 1.

Необходимая часть: Мы должны минимизировать ψ, используя ограничения-уравнении (8), (9) и (10). Полагая $\hat{\mu}_{ij} = w_{ij}^2$, $\forall i, j$. Тогда уравнения (8) и (9) в совокупности представляются уравнением $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 = 1$, $1 \leq j \leq n$. И имеет $\hat{\pi}_{ij} = 1 - w_{ij}^2 - (1 - w_{ij}^{2\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$.

Пусть $W = [w_{ij}^2]$ и, используя метод множителей Лагранжа, рассмотрим расслабленную минимизацию $\psi(\hat{U})$, опуская уравнение (9). Тогда, $L(W, \lambda)$ быть лагранжианом, заданным выражением:

$$L(W,\lambda) = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(w_{ij}^2 + \gamma\left(1 - w_{ij}^2 - (1 - w_{ij}^{2\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^m d_2^2(x_i, \hat{V}_j) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{c} w_{ij}^2 - 1\right)$$

Если ψ минимизируется в точке (W^*, λ^*), то градиент в обоих наборах переменной должен быть равен нулю. Поэтому:

$\frac{\partial L(W^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0,\ 1 \le i \le n;$ (10)

$\frac{\partial L(W^*,\lambda^*)}{\partial w_{ij}} = 0,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le c.$ (11)

От (11) Ю $\frac{\partial L(W^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$ Ю $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 = 1$ (5*)

От (12) ⇒

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = 2m\left(w_{ij}^2 + \gamma\pi\right)^{m-1}\left[2w_{ij} + \gamma\left(-2w_{ij} + 2w_{ij}^{2\alpha-1}.\left(1 - w_{ij}^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)\right] d^2(X_i, \hat{V}_j) - 2\lambda_i w_{ij} = 0$$

$\Rightarrow w_{ij}^2 + \gamma\hat{\pi}_{ij} = \left(\frac{\lambda_i}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\left[2\left(1 - \gamma + \gamma w_{ij}^{2\alpha-2}.\left(1 - w_{ij}^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right) d^2(X_i, \hat{V}_j)\right]^{\frac{-1}{m-1}}$ (6*)

От (5*) и (6*) получает:

$$\left(\frac{\lambda_i}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \left(1 + \gamma\sum_{j=1}^{c}\hat{\pi}_{ij}\right)\sum_{j=1}^{c}\left[2\left(1 - \gamma + \gamma w_{ij}^{2\alpha-2}.\left(1 - w_{ij}^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right) d^2(X_i, \hat{V}_j)\right]^{\frac{1}{m-1}} \quad (7^*)$$

Подставив (7*) в (6*), получим:

$w_{ij}^2 = \frac{z^* d^{\frac{-2}{m-1}}}{\sum_{j=1}^{c} z^* d^{\frac{-2}{m-1}}}\left(1 + \gamma\sum_{j=1}^{c}\hat{\pi}_{ij}\right) - \gamma\hat{\pi}_{ij};$

где $z^* = \left(1 - \gamma + \gamma w_{ij}^{2\alpha-2}.\left(1 - w_{ij}^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)^{\frac{-1}{m-1}}$

Как видно, что $z^* = z$ и оттуда получает $\hat{\mu}_{ij} = w_{ij}^2$

Достаточная часть: Мы рассмотрим матрицу Гессеса $H_L(\hat{U}^*)$, которая является функцией от $\hat{U}$, рассчитанной при $\hat{U} = \hat{U}^*$. Взяв частную производную второго порядка по $\{w_{st}\}$

$$\frac{\partial}{\partial w_{st}}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{ij}}\right) = \begin{cases} 4mw_{ij}d^2(m-1)(w_{ij}^2+\gamma\pi_{ij}^*)^{m-2}.[2w_{ij}-2w_{ij}\gamma+2\gamma w_{ij}^{2\alpha-1}(\alpha 1-w_{ij}^{2\alpha})^{1/\alpha-1}]+ & \\ +4md^2(w_{ij}^2+\gamma\pi_{ij}^*)^{m-1}+4m\gamma w_{ij}^{2\alpha-2}(2\alpha+1)d^2(1-w_{ij}^{2\alpha})^{1/\alpha}-4m\gamma d^2-2\lambda_i & \text{в случае } s=i, t=j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (8^*)$$

Из уравнения (8*), получаем n различных собственных значений матрицы Гессе $H_L(U^*)$, каждое из которых имеет кратность c. Следовательно, $H_L(U^*)$— диагональная матрица.

Поскольку каждое $\frac{\partial}{\partial w_{st}}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{ij}}\right) > 0$ при $s = i, t = j$, то $H_L(U^*)$— положительно определенная матрица с главными диагональными элементами больше 0 и недиагональными элементами, равными 0. Таким образом, она удовлетворяет достаточному условию. Следовательно, U^* — строгий локальный минимум V_j^*.

(Ч. Т. Д)

Доказательство предложения 2.

Поскольку минимизация по R^{cs} является неограниченной задачей, необходимость (7) следует из требования, чтобы $\nabla_{V_j}\psi(\hat{V}^*)$ исчезало для каждого j. Эквивалентно, направленные производные $\psi'(\hat{V}_j^*, y)$ по $\hat{V}_j$ исчезают в $\hat{V}^*$ в произвольных направлениях$y \in R^S, y \neq \theta$. Пусть $t \in R$, и определим $\forall j$:

$\square_j(t) = \psi\left(\hat{V}_j^* + ty\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m \left\|x_i - \left(\hat{V}_j^* + ty\right)\right\|^2;$

$$\square_j(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m \left\langle x_i - \hat{V}_j^* - ty, x_i - \hat{V}_j^* - ty\right\rangle$$

где $\langle z, z\rangle = \|z\|^2$- внутреннее произведение на R^s.

$$\frac{\partial \square_j(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m \left\langle -y, x_i - \hat{V}_j^* - ty\right\rangle + \left\langle x_i - \hat{V}_j^* - ty, -y\right\rangle = -2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m\left\langle y, x_i - \hat{V}_j^* - ty\right\rangle\right)$$

$\frac{\partial h_j(0)}{\partial t} = \psi'\left(\hat{V}_j^*, y\right) = -2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m\left\langle y, x_i - \hat{V}_j^*\right\rangle\right) = 0;\ 1 \le j \le c.$

Таким образом, необходимо для каждого j, чтобы:

(a) $\left\langle y, \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m\left(x_i - \hat{V}_j^*\right)\right\rangle = 0; \quad \forall y \in R^s, y \neq \theta$

Поскольку (a) может быть нулем для произвольного $y \neq \theta$ тогда и только тогда, когда его второй аргумент является нулевым вектором, из условия (7) вытекает и необходимость установлена. Хотя достаточность (7) можно установить, вычислив собственные значения $H_\psi(\hat{V}^*)$, Гессиана матрица размер $(cs \times cs)$ при $\hat{V}^*$, полезно привести другое доказательство. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_c)$, $y_j \in R^S, \forall j$и $t \in R$.

Тогда определим

$$\square(t) = \psi\left(\hat{V}^* + ty\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^m \left\|x_i - \hat{V}_j^* - ty_j\right\|,$$

Тогда

$$□'(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c} -2\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^{m} \left\langle y_j, x_i - \hat{V}_j^{*} - ty_j \right\rangle$$

И

$$□''(t) = y^T\left[H_\psi\left(\hat{V}^{*} + ty\right)\right]y$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c} 2\left(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij}\right)^{m} \left\langle y_j, y_j \right\rangle$$

Таким образом, при $t = O$ мы находим, что $\forall y \neq \theta \in R^{cs}$,

(b) $□''(0) = y^T\left[H_\psi(\hat{V}^{*})\right]y = 2\left(\sum_{j=1}^{c}\left\|y_j\right\|^2\left(\sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}_{ij} + \gamma\hat{\pi}_{ij})^m\right)\right)$

Для $y \neq \theta$, из (b) и ограничений $\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}_{ij} > 0$ следует, что $h''(0) > 0$, т.е. $H_\psi(\hat{V}^{*})$ положительно определена. Таким образом, (7) достаточно, и $\hat{V}^{*}$ является строгим локальным минимумом ψ.

(Ч. Т. Д)

<u>Доказательство леммы 1:</u>

Видно, что J_m является суммой произведений функций типа $\{y \to \|y\|^2\}$, $\{y \to y^m\}$, поэтому непрерывна на $M_{ifc} \times \boldsymbol{R}^{cs}$. Далее, предположим, что $(\hat{U}, \hat{V}) \notin S$. Тогда:

$$J_m(□_m(\hat{U},\hat{V})) = J_m(A_2 \circ A_1(\hat{U},\hat{V})) = J_m(F(G(\hat{U})), G(\hat{U}))$$

$J_m(□_m(\hat{U},\hat{V})) < J_m(\hat{U}, G(\hat{U}))$ (по предложению 1)

$J_m(□_m(\hat{U},\hat{V})) < J_m(\hat{U},\hat{V})$ (по предложению 2)

Наконец, если$(\hat{U},\hat{V}) \in S$, то в приведенном выше аргументе равенство преобладает.

(Ч. Т. Д)

<u>Доказательство леммы 2:</u>

Поскольку $\mathfrak{I}_m = A_2 \circ A_1$, а композиция непрерывных функций снова непрерывна, достаточно показать, что A_1 и A_2 непрерывны обе. Поскольку $A_1(\hat{U},\hat{V}) = G(\hat{U})$, A_1непрерывен, если непрерывен G. Чтобы убедиться, что G непрерывно в (cn) переменных $\{\hat{\mu}_{ij}\}$, заметим, что G - векторное поле, разрешаемое (cs) скалярным полем, скажем

$$G = (G_{11}, G_{12}, \ldots, G_{cs}): R^{cn} \to R^{cs}$$

где $G_{ij}: R^{cn} \to R$ определяется через (7) как

$$G_{ij}(\hat{U}) = \frac{\sum_j^N\left[\hat{\mu}_{ij} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha}\right]^m X_i}{\sum_j^N\left[\hat{\mu}_{ij} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha}\right]^m} = \hat{V}_{ij}$$

Теперь $\{\hat{\mu}_{ij} \to (\hat{\mu}_{ij} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha})^m\}$ непрерывно, $\{(\hat{\mu}_{ik})^m \to (\hat{\mu}_{ij} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha})^{1/\alpha})^m . x_{kj}\}$ непрерывно, и сумма непрерывных функций непрерывна; таким образом,

$$G_{ij}(\hat{U}) = \frac{B_{ij}(\hat{U})}{C_{ij}(\hat{U})}$$

является коциентом двух непрерывных скалярных полей для всех $1 \leq i \leq c$; $1 \leq j \leq n$. Ввиду ограничения (9), $C_{ij}(\hat{U})$ никогда не исчезает, поэтому G_{ij} также непрерывен$\forall i, j$. Поэтому G и в свою очередь A_1, непрерывны на всех своих доменах. Поскольку$A_2(\hat{V}) = \left(F(\hat{V}), \hat{V}\right)$, достаточно показать, что F - непрерывная функция (cs) переменных $\{\hat{V}_{ij}\}$. F - векторное поле с разрешением по (cn) скалярным полям,

$$F = (F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{cn}): R^{cs} \to R^{cn}$$

где $F_{ij}: R^{cs} \to R$ определяется через (6) как

$$F_{ij}(\hat{V}) = \frac{z\|x_j - \hat{V}_i\|^{\frac{-2}{m-1}}}{\sum_{j=1}^{c} z\|x_j - \hat{V}_i\|^{\frac{-2}{m-1}}}\left(1 + \gamma\sum_{j=1}^{c}\hat{\pi}_{ij}\right) - \gamma\hat{\pi}_{ij} = \hat{\mu}_{ij},$$

где $z = \left[1 - \gamma + \gamma\hat{\mu}_{ij}{}^{(\alpha-1)}\left(1 - \hat{\mu}_{ij}{}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{\frac{-1}{m-1}}$

Поскольку любая нормальная функция (униформенно) непрерывна, имеем

$\{\hat{V}_j \to \|X_i - \hat{V}_j\|\}$ непрерывна $\forall j$;

$\left\{\|X_i - \hat{V}_j\| \to \|X_i - \hat{V}_j\|^{-2/(m-1)}\right\}$ непрерывна $\forall j$;

а сумма непрерывных функций непрерывна; таким образом, $F_{ij}(\hat{V}) = \frac{D_{ij}(\hat{V})}{E_{ij}(\hat{V})}$ - коциент двух непрерывных скалярных полей для всех $1 \leq j \leq c$; $1 \leq i \leq n$. Ввиду нашей общей гипотезы, что $d_{ij} = \|X_i - \hat{V}_j\| > 0, \forall j, i$ непрерывна. Поэтому F, и в свою очередь A_2, непрерывны на всех своих областях. Таким образом, $\mathfrak{I}_m = A_2 \circ A_1$ непрерывно на $M_{ifc} \times R^{cs}$. **(Ч. Т. Д)**

<u>Доказательство леммы 3:</u>

Пусть выбрано $\hat{U}^{(0)} \in M_{ifc}$. Тогда $\hat{V}^{(0)} = G(\hat{U}^{(0)})$ вычисляется по (6) так, что

$$\hat{V}_j^{(0)} = \frac{\sum_j^N\left[\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij}^{(0)} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}^{(0)\,\alpha})^{1/\alpha}\right]^m X_i}{\sum_j^N\left[\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij}^{(0)} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}^{(0)\,\alpha})^{1/\alpha}\right]^m}, 1 \leq j \leq c;$$

Пусть

$$\rho_{ij} = \frac{\left(\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{ij}^{(0)} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{ij}^{(0)\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m}{\sum_{l=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{jl}^{(0)} + \gamma - \gamma\hat{\mu}_{jl}^{(0)} - \gamma(1 - \hat{\mu}_{jl}^{(0)\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m} = \frac{\left(\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma\hat{\pi}_{ij}^{(0)}\right)^m}{\sum_{l=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{jl}^{(0)} + \gamma\hat{\pi}_{jl}^{(0)}\right)^m},$$

$1 \leq i \leq n$.

Ввиду ограничений (8) и (9) должно быть так, чтобы $0 < \rho_{ij} < 1 \forall i, j$и поэтому $\forall j$

$$\hat{V}_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}x_i$$

При

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\left(\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma \hat{\pi}_{ij}^{(0)}\right)^m}{\sum_{l=1}^{n} \left(\hat{\mu}_{jl}^{(0)} + \gamma \hat{\pi}_{jl}^{(0)}\right)^m} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma \hat{\pi}_{ij}^{(0)}\right)^m}{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\mu}_{ij}^{(0)} + \gamma \hat{\pi}_{ij}^{(0)}\right)^m} = 1$$

Таким образом, $\forall j, \hat{V}_j^{(0)} \in conv(X)$, и поэтому $\hat{V}^{(0)} \in [conv(X)]^c$. Продолжая рекурсию, мы знаем, что $\hat{U}^{(1)} = F(\hat{V}^{(0)}) \in M_{ifc}$ по (7), и тогда $\hat{V}^{(1)} = G(\hat{U}^{(1)}) \in [conv(X)]^c$ с по тому же аргументу, что и выше. Таким образом, каждый итерат $\Im_m$ принадлежит$M_{ifc} \times [conv(X)]^c$. Заметим, что если $\hat{V}^{(0)}$ является инициализацией функции $\Im_m$, то мы можем выбрать $\hat{V}^{(0)} \in R^{cs} \backslash [conv(X)]^c$, но $\hat{U}^{(0)} = F(\hat{V}^{(0)}) \in M_{ifc}$, так что $\hat{V}^{(k)} = G(\hat{U}^{(k)}) \in [conv(X)]^c \forall i \geq 1$.

Чтобы убедиться, что $M_{ifc} \times [conv(X)]^c$ компактен, заметим, что X конечен, каждый $X_k \in X$имеет конечные компоненты, поэтому диаметр $X = \text{diameter}(\text{conv}(X))$ ограничен. Поскольку $conv(X)$ - это выпуклая оболочка конечного числа генераторов, она замкнута.

Таким образом, $conv(X)$ замкнута и ограничена в R^s. По обобщенной теореме Гейне-Бореля $conv(X)$ компактна, а значит, $[conv(X)]^c$ также компактна. Аналогичный во всех отношениях аргумент $(M_{ifc} = conv(M_{co}))$, устанавливает компактность M_{ifc}. Таким образом, $M_{ifc} \times [conv(X)]^c$компактен. **(Ч. Т. Д).**

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе доказано, что интуиционистский нечеткий C-средних сходится. С помощью теоремы Цангвилла итерационная последовательность, создаваемая алгоритмом CIFCM, заканчивается в локальном минимуме или седловой точке, или, в крайнем случае, содержит подпоследовательность, которая заканчивается в локальном минимуме или седловой точке целевой функции алгоритма кластеризации

Благодарности

Выражаем благодарность учёным и исследователям в рассматриваемой области, предложившим эффективное направление прогнозирования временных рядов, которое является основой для разработки новых улучшений, предложенных в этой работе.

Библиография

[1] T. T. З. Нгуен and Л. В. Черненькая, “Нечеткая модель второго типа прогнозирования временных рядов с хедж-алгеброй и алгоритмом генетической оптимизации,” *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 12, no. 1, pp. 10–20, 2024.

[2] T. T. З. Нгуен and Л. В. Черненькая, “Фаззификация в моделях прогнозирования нечетких временных рядов,” *Журнал Известия Тульского государственного университета – Технические науки (ТулГУ, г. Тула)*, vol. 8, no. Системный анализ, Управление и обработка информации, pp. 337–346, 2023.

[3] M. S. Abu, L. E. Aik, and N. Arbin, “A theorem for improving kernel based fuzzy c-means clustering algorithm convergence,” *AIP Conf Proc*, vol. 1660, 2015, doi: 10.1063/1.4915677.

[4] James C. Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*.

[5] J. Bezdek, “Fuzzy Mathematics in Pattern Classification,” Cornell University, Ithaca, New York, 1973.

[6] L. A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” *Information and control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[7] T. T. З. Нгуен and Л. В. Черненькая, “Эвристическая нечеткая модель прогнозирования высокого порядка с хедж-алгеброй,” in *Системный анализ в проектировании и управлении*, 2023.

[8] P. T. M. Phuong, P. H. Thong, and L. H. Son, “Theoretical Analysis of Picture Fuzzy Clustering: Convergence and Property,” *Journal of Computer Science and Cybernetics*, vol. 34, no. 1, pp. 17–32, 2018, doi: 10.15625/1813-9663/34/1/12725.

[9] G. Gan and J. Wu, “A convergence theorem for the fuzzy subspace clustering (FSC) algorithm,” *Pattern Recognit*, vol. 41, no. 6, pp. 1939–1947, 2008, doi: 10.1016/j.patcog.2007.11.011.

[10] Нгуен Тхи Тху Зунг and Л. В. Черненькая, “Дискретизация в моделях прогнозирования нечетких временных рядов,” *Журнал Известия Тульского государственного университета – Технические науки (ТулГУ, г. Тула),* vol. 8, no. Системный анализ, Управление и обработка информации, pp. 296–304, 2023, doi: 10.24412/2071-6168-2023-8-296-297.

[11] T. T. З. Нгуен and Л. В. Черненькая, “Модель Прогнозирования Эвристических Нечетких Временных Рядов Высокого Порядка, Основанная На Хедж-Алгебраическом Подходе Часть 2,” *Журнал Известия Тульского государственного университета – Технические науки (ТулГУ, г. Тула),* vol. 9, no. Системный анализ, Управление и обработка информации, 2023.

[12] T. T. З. Нгуен and Л. В. Черненькая, “Системный анализ в управлении развитием территориальных комплексов вьетнама,” in *В сборнике: Системный анализ в проектировании и управлении. сборник научных трудов XXV Международной научной и учебно-практической конференции*, СПБ, 2021, pp. 346–352.

[13] Q. M. Danish Lohani, R. Solanki, and P. K. Muhuri, “A convergence theorem and an experimental study of intuitionistic fuzzy c-mean algorithm over machine learning dataset,” *Applied Soft Computing Journal*, vol. 71, pp. 1176–1188, 2018, doi: 10.1016/j.asoc.2018.04.014.

[14] Нгуен Тхи Тху Зунг and Васильевна Черненькая Людмила, “Модель Прогнозирования Эвристических Нечетких Временных Рядов Высокого Порядка, Основанная На Хедж-Алгебраическом Подходе Часть 1,” *Журнал Известия Тульского государственного университета – Технические науки (ТулГУ, г. Тула)*,

vol. 9, no. Системный анализ, Управление и обработка информации, 2023.

[15] C. Wu and N. Liu, “Suppressed robust picture fuzzy clustering for image segmentation,” *Soft comput*, vol. 25, no. 5, pp. 3751–3774, 2021, doi: 10.1007/s00500-020-05403-8.

[16] Y. Pu, W. Yao, and X. Li, “EM-IFCM: Fuzzy c-means clustering algorithm based on edge modification for imbalanced data,” *Inf Sci (N Y)*, vol. 659, no. January 2023, p. 120029, 2024, doi: 10.1016/j.ins.2023.120029.

[17] A. K. Varshney, P. K. Muhuri, and Q. M. D. Lohani, *Density-based IFCM along with its interval valued and probabilistic extensions, and a review of intuitionistic fuzzy clustering methods*, vol. 56, no. 4. Springer Netherlands, 2023. doi: 10.1007/s10462-022-10236-y.

[18] C. Wu and Z. Kang, “Robust entropy-based symmetric regularized picture fuzzy clustering for image segmentation,” *Digital Signal Processing: A Review Journal*, vol. 110, p. 102905, 2021, doi: 10.1016/j.dsp.2020.102905.

[19] Dung Thi Thu Nguyen, A Complete Intuitionistic Fuzzy C-Means Clustering Method, International Journal of Open Information Technologies, vol. 12, no. 7, pp. 97–104, 2024.

Convergence of the complete intuitionistic fuzzy C-means clustering algorithm

Dung Thi Thu Nguyen

***Abstract*—This paper discusses the convergence of the complete intuitionistic fuzzy C_means clustering method (CIFCM). The complete intuitionistic fuzzy C-means clustering method based on the modification of the target function considering the index hesitance is a more efficient method to modify the intuitionistic fuzzy C_means clustering method. The target function of the clustering algorithm is a series of Picard iterations according to the updating of the membership matrix and cluster centers. Usually, fixed point theorems, of which the contracting mapping theorem is a classical case, are used to solve the convergence problem of Picard sequences. Picard sequences based on the fuzzy clustering method C-means algorithm (FCM) does not allow to verify the contraction property mainly due to the two-component compositional nature of one iteration. Therefore, in this paper, the convergence of the complete intuitionistic fuzzy C_means clustering method is examined using Zangwill's theorem, The iterative sequence generated by the algorithm of the complete intuitionistic fuzzy C-means clustering method ends at a local minimum or saddle point, or, at most, contains a sub-sequence that ends at a local minimum or saddle point of the target function of the complete intuitionistic fuzzy C_means clustering algorithm**

***Keywords*—Complete intuitionistic fuzzy C_means clustering, Zangwill theorem, convergence.**

REFERENCES

[1] T. T. Z. Nguen and L. V. Chernen'kaja, "Nechetkaja model' vtorogo tipa prognozirovanija vremennyh rjadov s hedzh-algebroj i algoritmom geneticheskoj optimizacii," International Journal of Open Information Technologies, vol. 12, no. 1, pp. 10–20, 2024.

[2] T. T. Z. Nguen and L. V. Chernen'kaja, "Fazzifikacija v modeljah prognozirovanija nechetkih vremennyh rjadov," Zhurnal Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta – Tehnicheskie nauki (TulGU, g. Tula), vol. 8, no. Sistemnyj analiz, Upravlenie i obrabotka informacii, pp. 337–346, 2023.

[3] M. S. Abu, L. E. Aik, and N. Arbin, "A theorem for improving kernel based fuzzy c-means clustering algorithm convergence," AIP Conf Proc, vol. 1660, 2015, doi: 10.1063/1.4915677.

[4] James C. Bezdek, Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms.

[5] J. Bezdek, "Fuzzy Mathematics in Pattern Classification," Cornell University , Ithaca, New York, 1973.

[6] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," Information and control, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[7] T. T. Z. Nguen and L. V. Chernen'kaja, "Jevristicheskaja nechetkaja model' prognozirovanija vysokogo porjadka s hedzh-algebroj," in Sistemnyj analiz v proektirovanii i upravlenii, 2023.

[8] P. T. M. Phuong, P. H. Thong, and L. H. Son, "Theoretical Analysis of Picture Fuzzy Clustering: Convergence and Property," Journal of Computer Science and Cybernetics, vol. 34, no. 1, pp. 17–32, 2018, doi: 10.15625/1813-9663/34/1/12725.

[9] G. Gan and J. Wu, "A convergence theorem for the fuzzy subspace clustering (FSC) algorithm," Pattern Recognit, vol. 41, no. 6, pp. 1939–1947, 2008, doi: 10.1016/j.patcog.2007.11.011.

[10] Nguen Thi Thu Zung and L. V. Chernen'kaja, "Diskretizacija v modeljah prognozirovanija nechetkih vremennyh rjadov," Zhurnal Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta – Tehnicheskie nauki (TulGU, g. Tula), vol. 8, no. Sistemnyj analiz, Upravlenie i obrabotka informacii, pp. 296–304, 2023, doi: 10.24412/2071-6168-2023-8-296-297.

[11] T. T. Z. Nguen and L. V. Chernen'kaja, "Model' Prognozirovanija Jevristicheskih Nechetkih Vremennyh Rjadov Vysokogo Porjadka, Osnovannaja Na Hedzh-Algebraicheskom Podhode Chast' 2," Zhurnal Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta – Tehnicheskie nauki (TulGU, g. Tula), vol. 9, no. Sistemnyj analiz, Upravlenie i obrabotka informacii, 2023.

[12] T. T. Z. Nguen and L. V. Chernen'kaja, "Sistemnyj analiz v upravlenii razvitiem territorial'nyh kompleksov v'etnama," in V sbornike: Sistemnyj analiz v proektirovanii i upravlenii. sbornik nauchnyh trudov XXV Mezhdunarodnoj nauchnoj i uchebno-prakticheskoj konferencii, SPB, 2021, pp. 346–352.

[13] Q. M. Danish Lohani, R. Solanki, and P. K. Muhuri, "A convergence theorem and an experimental study of intuitionistic fuzzy c-mean algorithm over machine learning dataset," Applied Soft Computing Journal, vol. 71, pp. 1176–1188, 2018, doi: 10.1016/j.asoc.2018.04.014.

[14] Nguen Thi Thu Zung and Vasil'evna Chernen'kaja Ljudmila, "Model' Prognozirovanija Jevristicheskih Nechetkih Vremennyh Rjadov Vysokogo Porjadka, Osnovannaja Na Hedzh-Algebraicheskom Podhode Chast' 1," Zhurnal Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta – Tehnicheskie nauki (TulGU, g. Tula), vol. 9, no. Sistemnyj analiz, Upravlenie i obrabotka informacii, 2023.

[15] C. Wu and N. Liu, "Suppressed robust picture fuzzy clustering for image segmentation," Soft comput, vol. 25, no. 5, pp. 3751–3774, 2021, doi: 10.1007/s00500-020-05403-8.

[16] Y. Pu, W. Yao, and X. Li, "EM-IFCM: Fuzzy c-means clustering algorithm based on edge modification for imbalanced data," Inf Sci (N Y), vol. 659, no. January 2023, p. 120029, 2024, doi: 10.1016/j.ins.2023.120029.

[17] A. K. Varshney, P. K. Muhuri, and Q. M. D. Lohani, Density-based IFCM along with its interval valued and probabilistic extensions, and a review of intuitionistic fuzzy clustering methods, vol. 56, no. 4. Springer Netherlands, 2023. doi: 10.1007/s10462-022-10236-y.

[18] C. Wu and Z. Kang, "Robust entropy-based symmetric regularized picture fuzzy clustering for image segmentation," Digital Signal Processing: A Review Journal, vol. 110, p. 102905, 2021, doi: 10.1016/j.dsp.2020.102905.

[19] Dung Thi Thu Nguyen, A Complete Intuitionistic Fuzzy C-Means Clustering Method, International Journal of Open Information Technologies, vol. 12, no. 7, pp. 97–104, 2024.